



TITLE:

工作機械の振動特性の解析と最適設計(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

吉村, 允孝

CITATION:

吉村, 允孝. 工作機械の振動特性の解析と最適設計. 京都大学, 1976, 工学博士

ISSUE DATE:

1976-11-24

URL:

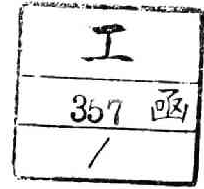
<https://doi.org/10.14989/doctor.r3191>

RIGHT:

工作機械の振動特性の解析と最適設計

昭和 51 年

吉 村 允 孝



工作機械の振動特性の解析と最適設計

Analysis and Optimization
of the Structure Design of Machine Tool
in view of Vibration Characteristics

昭和 5 1 年

1 9 7 6

吉 村 允 孝

Masataka YOSHIMURA

目 次

緒 論	1
第 I 章 工作機械の振動特性の解析および最適化の原理	5
第 1 節 緒 論	5
第 2 節 振動特性解析の基本原則	6
1.2.1 緒 言	6
1.2.2 振動特性の解析における問題提起	6
1.2.3 振動特性解析のための基本的な因子	9
(i) エネルギー分布	9
(a) エネルギー分布の概念	9
(b) エネルギー分布による減衰能の表示	12
(ii) モーダルフレキシビリティ	14
(a) モーダルフレキシビリティの定義	14
(b) 単純モデルによるモーダルフレキシビリティの概念の説明	16
(c) モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する 関係	18
(d) 単純モデルによるモーダルフレキシビリティの静コンプラ イアンスに対する関係の説明	25
(e) モーダルフレキシビリティとエネルギー分布との関係	29
(iii) 振動内部力	33
(a) 構造部材または機械要素の振動特性の解析の場合	34
(b) 結合部での動的剛性および減衰能の解析の場合	34
(c) 実動状態の動特性の解析の場合	36
1.2.4 結 言	36
第 3 節 工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原則	37
1.3.1 緒 言	37

1.3.2	再生型自励びびりに関する最適化設計の基本概念	37
1.3.3	最適化設計を支配するパラメータの解析	40
(i)	基本となるパラメータの解析	40
(a)	モーダルフレキシビリティ	41
(b)	対数減衰率	42
(c)	リセプタンスの最大値	46
(ii)	ベクトル軌跡を正実部もしくは負実部方向へ移動させる パラメータの解析	47
(a)	正または負実軸方向にのみ移動の場合	48
(b)	実軸方向だけでなく虚軸方向にも移動の場合	52
(iii)	構造の骨組および切削点での方向係数により支配される パラメータについての考察	53
1.3.4	最適化設計の基本的な手順	55
1.3.5	結 言	57
第4節	結 論	58

第Ⅱ章 電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解

析法	59
第1節 緒 論	59
第2節 リセプタンス合成法電子計算機プログラムシステム	61
2.2.1 緒 言	61
2.2.2 解析の原理	61
2.2.3 計算の原理と方法	66
2.2.4 適用例	74
(1) 2次元振動モデル	74
(2) プラノミラー	78
(3) 立旋盤	86
(i) 計算のためのモデル化	86
(ii) 解析結果	88

(iii) 切削点での動剛性解析	90
2.2.5 結 言	93
第3節 動剛性合成法電子計算機プログラムシステム	95
2.3.1 緒 言	95
2.3.2 解析および計算の原理	95
(i) 部分構造の動剛性	95
(ii) 部分構造の動剛性の合成	97
(iii) 柔結合部の動剛性	98
(iv) 周波数応答	99
(v) モード形	100
(vi) エネルギー分布	100
(vii) モーダルフレキシビリティと減衰比	101
(viii) 振動内部力	102
(ix) 共振振動数および周波数応答の効率のよい求め方	102
2.3.3 適用例	103
(1) 薄平板モデルの振動特性	103
(2) 開口部をもつNCボール盤のコラムの静剛性	104
(3) 門型フライス盤の縮尺模型	107
2.3.4 結 言	110
第4節 結 論	112
第Ⅲ章 結合部の動的剛性と減衰能の解析および構造部材の剛性の評価	113
第1節 緒 論	113
第2節 単純化モデルによる種々の結合部の動的剛性および減衰能の 解析	116
3.2.1 緒 言	116
3.2.2 実験の原理と実験モデルおよび実験方法	119
(i) 実験の原理	119
(ii) 実験モデルの説明	121

(a) ボルト結合部モデル	121
(b) 溶接結合部モデル	122
(c) 案内面モデル	123
(iii) 実験方法	123
3.2.3 ボルト結合部モデルの解析	125
(i) 序 論	125
(ii) 実験モデルの計算機シミュレーションと結合部間の相対変位の解析	126
(iii) 実験結果と考察	130
(iv) 接触結合部等価ばね剛性および等価減衰係数の計算	136
(a) 計算方法	136
(b) 計算結果	138
(v) ボルト結合部モデルの動的剛性および減衰能についての結論	139
3.2.4 溶接結合部モデル	141
(i) 序 論	141
(ii) 実験結果と考察	141
(iii) 溶接結合部モデルの減衰能についての結論	146
3.2.5 案内面モデル	147
(i) 序 論	147
(ii) 実験モデルの形状と実験方法	147
(iii) 案内面モデルの計算機シミュレーション	150
(iv) 実験結果と考察	154
(v) 結合部等価ばね剛性および等価減衰係数の計算	160
(vi) 案内面モデルの動的剛性および減衰能についての結論	163
3.2.6 結 言	164
第3節 実機における結合部の動的剛性および減衰能の解析	166
3.3.1 緒 言	166
3.3.2 円筒研削盤ホイールヘッド	167

(i)	序 論	167
(ii)	ホイールヘッドの振動特性解析のためのモデル化	167
(iii)	計算結果	171
(iv)	まとめ	173
3.3.3	工作機械テーブル案内面	174
(i)	序 論	174
(ii)	実験装置	175
(iii)	案内面の動的剛性および減衰能の測定原理と方法	176
(iv)	すべりおよび静圧案内面における等価ばね剛性および等価減衰係数の実験結果	178
(v)	工作機械テーブル案内面の剛性および減衰能の電子計算機プログラムによるシミュレーション	179
(vi)	まとめ	180
3.3.4	結 言	180
第4節	構造部材の剛性の評価法	183
3.4.1	緒 言	183
3.4.2	構造部材の剛性の評価における問題点	183
3.4.3	構造部材のねじり剛性評価法	185
(i)	計算機シミュレーションより求まるエネルギー値を用いて等価剛性を求める方法	186
(ii)	実験によるねじり剛性の測定	188
3.4.4	複雑形状部材の多数の等価剛性はりへの置換え	190
(i)	構造部材を等価な剛性をもつものに置き換える必要性	190
(ii)	複雑形状部材を多数の等価剛性はりに置き換える方法	190
(iii)	解析例	191
3.4.5	結 言	192
第5節	結 論	193
第IV章	工作機械の振動特性に関する最適設計	195

第1節 緒 論	195
第2節 単一の固有モードに着目した場合の振動特性の改善および 最適化設計	197
4.2.1 緒 言	197
4.2.2 電子計算機プログラムによる最適化設計の手順	197
4.2.3 最適化設計の適用例	202
4.2.4 結 言	210
第3節 複数の固有モードに着目した場合の振動特性の改善および 最適化設計	211
4.3.1 緒 言	211
4.3.2 最適化設計の原理と手法	211
(i) 複数の固有モードに着目した最適化設計の概念	211
(ii) 複数の固有モードに着目した設計変更の単純なモデルに よる説明	212
(iii) 最適化設計の手法とその流れ	215
4.3.3 最適化設計の適用例	217
(i) 適用モデルの説明	217
(ii) 適用1	220
(iii) 適用2	225
(iv) 適用3	229
4.3.4 結 言	230
第4節 結 論	231
第V章 実動状態における振動特性の解析原理	233
第1節 緒 論	233
第2節 周波数伝達特性の表示法	238
5.2.1 緒 言	238
5.2.2 入力と振動変位の間の伝達特性	238
5.2.3 入力と振動内部力の伝達特性	239

5. 2. 4 結 言	242
第 3 節 任意入力に対する応答の解析法	243
5. 3. 1 緒 言	243
5. 3. 2 過渡入力に対する応答の解析法	243
(i) 解析の原理	244
(ii) 解析例	249
(1) 2 自由度計算モデル (2 つの共振振動数の接近の度合による 応答の変化)	250
(2) 過渡入力に対する変位応答の測定結果と計算機シミュレーシ ョン結果との対応	250
(3) 3 自由度計算モデル (入力点および応答ピックアップ点の相 違による変位応答の変化)	253
5. 3. 3 任意周期入力に対する応答の解析法	257
(i) 解析の原理	257
(ii) 解析例	260
(1) 3 自由度計算モデル (モーダルフレキシビリティの相違によ る変位応答の変化)	260
(2) 横型フライス盤における模擬切削力に対する応答解析	261
5. 3. 4 結 言	265
第 4 節 結 論	266
結 論	267
謝 辞	270
参考文献	271
付録 動剛性合成法電子計算機プログラムシステムマニュアルの概要 ...	280

緒

論

工作機械により高能率かつ高精度な加工を行うのに最も大きな障害は、びびり振動と総称される加工中に生じる種々の振動現象である。本論文は工作機械の構造の面からその振動特性を解析し、さらにびびり振動を生じにくい工作機械を設計することに関する最適設計を行う手法を確立することを目的としている。

従来機械を設計する場合、静的な力が機械に加わるものと考え、材料力学的な解析のみが行なわれていることが多く、振動特性としての解析は、その機械を実際に動かしてみてもトラブルが生じればその対策を考える場合に行なったり、静的な解析に適当な安全率をかけたたりするのが通例であった。しかし、工作機械に限らず一般の機械が目的とする作業を行い、実動の状態にあるときには機械内の各要素または部材に種々の振動力が必ず発生し、静的な特性とはまったく異なった現象を示す。したがって機械を設計する場合、その振動現象を考慮しないことは、機械は必ず動く機能を持つものであるという機械本来の性質を無視した設計といえる。このような意味で機械における振動特性の解析は、機械工学における最も本質的な問題であり、古くから研究が行なわれ、多くの研究結果が発表されている。最近では、電子計算機の発達と測定技術の向上にともない、理論解析および実験による解析を容易に行えるようになった。しかし、機械を設計する場合にこれらの研究成果が十分に生かされているとは言えない。この原因は色々考えられるが、まず、振動理論としての純粋な理論解析と主として実験面からの現象の把握の2つの面の研究が別個に行なわれ発展してきたことが挙げられる。機械工学としての振動解析において、これらの両面の解析は本来一体であり、現象の把握により新しい理論解析が生まれ、理論解析より正しい現象の把握が可能となるはずである。さらに原因として、研究を行う上で問題点と解析を行うことの目標が曖昧なために、研究が積み上がって目的とする成果を得るということが困難であることが挙げられる。これらのことは、

工作機械を対象とした解析においても同様であり，研究の現状および問題点については各章の緒論または緒言で述べる。

そこで本論文における研究を行うにあたっては，できるだけ目的とする解析の原点にもどってその問題点を考察し，問題点を解決するためにどのような原理に基づいた解析をする必要があるかを明確にし，さらにそれをどのような手法を用いて実行するのが最も妥当であるかを終始検討して行くこととする。また理論解析と，実験による検証および現象の把握の両面から解析を行うことを基本方針とする。

まず第Ⅰ章は，工作機械の振動特性を解析する上での問題点を提起し，その問題点を解決するための基本的な因子を明らかにする。ここでの解析は本論文のすべての章の基本となる原理を示すものである。さらに，工作機械の振動特性を解析する最終的な1つの目標であるびり振動に関する最適設計の基本原則を述べ，研究成果を積み上げていくための指標を明示する。第Ⅱ章は，振動特性を理論解析するための手法としてリセプタンス合成法および動剛性合成法の2つの電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解析法を述べる。この解析は本論文のすべての章において理論解析の手法として使用する。第Ⅲ章は，機械構造全体の振動特性を解析する上で最もその特性の把握が困難な種々の結合部の動的剛性と減衰能の解析および複雑な形状をもつ構造部材の剛性の評価法について述べる。本章の解析は第Ⅱ章で述べる解析手法のデータを与えるものであるが，その理論解析の手段として第Ⅱ章の解析手法を用いる。第Ⅳ章は，第Ⅰ章で解析する振動特性評価の基本原則および工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原則に基づき，そして第Ⅱ章で開発する電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解析法を用いて，工作機械のびり振動の防止に関する最適設計を行う手法を述べ，適用例によりその有効性を実証する。第Ⅱ章および第Ⅲ章の解析は，周波数領域上に固有の特性をもつ機械構造物の振動特性を明らかにすることを目的としているが，機械が実際に作業を行い実動状態にあるときの振動挙動を把握するには，時間軸

上で変化する特性としての解析が必要である。第Ⅴ章は、周波数領域上で明確になった構造物の固有の特性を用いて、実動状態にある機械の振動特性を解析するための基礎となる解析原理を述べる。

以上の第Ⅰ章から第Ⅴ章までの研究により工作機械の振動特性を設計の段階で評価解析することができ、また、その振動特性に関する最適設計を実施することが可能となる。さらに実動状態にある機械の振動特性を解析し把握するための解析原理が明らかとなる。

また、本論文の研究は工作機械を対象としたものであるが、種々の機械の中でも工作機械は最も高精度な諸特性を要求し、微小な振動をもきらうものであり、最も厳密な振動解析を必要とすると考えられる。この意味で、工作機械を対象とした本論文の研究の多くを工作機械ばかりでなく他の機械に適用することは容易であると思われる。

第 1 章 工作機械の振動特性の解析および最適化の原理

第 1 節 緒 論

工作機械に限らず一般に機械の振動特性を解析し、さらにその特性に関する最適設計を行うには、まず振動特性の評価および解析の基本となる原理を明確にすることが必要である。従来多くの振動特性の解析においては、固有振動数およびモード形等を求めるにとどまり、機械の動特性の本質的な把握および最適な特性への指向に結びつく研究は比較的少ないと思われる。それは、振動特性を解析する場合の問題点および振動特性を決定する基本的な因子についての認識が足りなかったからと考える。ゆえに、本論文で目的とする工作機械の振動特性の解析を始めるに先立ち、その解析の基礎をなす原理について考察する。

まず本章第 2 節では、振動特性の解析における問題点を明確にしそれを提起する。そしてその問題点を解決するための基本的な因子を挙げ、それぞれについての概念の説明と解析を行う。ここに述べる原理は本論文のすべての解析の基礎をなしているものである。

次に第 3 節において、工作機械の振動特性の解析の究極の目的の 1 つである最適化設計を行う上での基本の概念と原理について考察する。研究の究極の目的に達するには多くの解析を積み上げることが必要であるが、研究の出発点においてその最終的な目標とそのために着目すべき因子が何であるかが不明確であれば、目的に到達するための妥当な研究を行うことは不可能であると考ええる。ゆえに本節において最適化設計の基本概念と最適化を支配するパラメータを本章第 2 節に示した基本原理に則って解析し、そしてこれらのパラメータを基に最適化設計を行う基本的な手順を述べる。

第 2 節 振動特性解析の基本原則

1. 2. 1 緒 言

本節において機械構造物の振動特性を解析する場合の基本となる原理について述べる。一般に振動特性は物理的な現象であり、単に数理的な解析だけでは問題が解決するものではなく、また計算結果と実験結果のみかけの一致を追い求めても最終的に目的とする最適設計および実動状態の動特性の正確な把握に結びつくとは考えられない。そこで本論文の研究の出発点において解析の基本原則を明らかにする。まず、その解析における問題点を提起し、その問題点を解決するに何に着目すべきであるかを考察する。そして次に、この考察より得られる振動特性解析のための基本的な因子として、エネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力を提唱し、それらの概念の解析を行う。

1. 2. 2. 振動特性の解析における問題提起

機械構造物の振動特性を解析する場合の問題点を分類して以下に考察する。

1-A) 工作機械に限らず、一般の機械は多くの部材または機械要素により組み立てられ目的とする機能を果している。この機械が振動状態にあるとき、その振動特性は個々の部材または機械要素の異なる物理的な現象が相互に影響を及ぼし合い複雑な挙動を示す。すなわち、この機械システムの振動現象は、1つの部材または機械要素の振動特性だけで決定されるのではなく、機械システム全体のバランスによって定まる。したがってその特性を解析するにはそれぞれ異なる物理的な現象を統一して表現するパラメータが必要である。

1-B) 振動システムを構成するのは機械構造全体であり、さらに機械が据付けられている基礎、地盤またその機械をとりまく空気または流体をもその振動システムに入れる必要がある場合も生じる。たとえば、ある機械の振動特性

を解析するとき、ある機械要素のみを1つの振動システムとみなし、その特性を解析しても、もし他の要素がその振動特性に重要な働きをしているとすれば、その1つの機械要素のみに着目した解析は正しいものとはいえない。そこで、問題とする振動特性を支配するのは機械システムのどの範囲までであるかを明確にすることは、振動特性解析の出発点であると考えられる。

1-C) このように機械システム全体を解析した上で、機械システム内の各部材または機械要素が振動特性上どのような働きをしているのかを把握することが必要であり、またどの部材または機械要素に着目すべきであるかを決定しなければならない。このことは振動特性をより深く理解し、さらにその特性の改善を行うための基礎として重要である。

2-A) 一般に機械構造物は力学的に無限の数の自由度をもっている。したがって無限の数の固有振動数と固有モードをもっていることになる。機械の静剛性の解析においては、静的な力と変位という1つの組合せにだけ着目すればよい。そのため簡単であるが、この機械に振動力が加われば、種々の共振状態を生じうる。よって振動特性の解析をする場合には、その無限に存在する固有モードをすべて考慮することが原則的には必要である。たとえば、振動特性を決定する固有モードとしてある1つの固有モードを選びその特性の解析を行っても、他にその特性を決定する重要なモードが、無限に存在する固有モードの中に存在するかもしれない。しかし、その無限に存在する固有モードをすべて考慮することは不可能である。そこで、問題とする振動特性を支配する固有モードを選択する場合、どのように無限に存在するもののなかから選び出せば、必要かつ十分であるという評価を下せるかの原理が必要である。

2-B) 着目すべき固有モードが選択され、その特性を解析する場合、その特性を決定するパラメータを分類し、各パラメータの性質を理解した上で、最

も重要なパラメータを選ばなければならない。

2-C) この着目した固有モードの特性は、他に無限に存在するはずの固有モードの特性とまったく独立ではなく、なんらかの関係をもっていることが予想される。もし、なんらかの関係があるとすれば、着目した固有モードの特性だけでその機械の振動現象を完全に把握したことにはならない。したがって各固有モードの振動特性を結びつける法則をみいだすことが必要である。

3-A) 機械構造が振動状態にあるとき、その構造内を種々の振動力が伝達される。この振動特性を解析するには、振動システム全体を解析することが基本であるが、実際問題においては、振動系としてある部材を切り離して考えたい場合や、ある部材または機械要素に着目して解析することが必要なこともある。このような時、振動システム全体を考慮するという大前提に合致し、かつ目的とする要素の解析を行うには何に着目すべきかという原理を見いださねばならない。

3-B) 機械構造内を伝達される振動力は、当然、各部材または機械要素を接合する結合部にも伝えられる。ところがこの結合部の動的な挙動は、伝達される力の種類や大きさに関する大きな非線形特性を示し、機械構造全体の振動特性の非線形性の重要な原因の1つではないかと考えられる。このような非線形が振動特性を評価する場合の重要なファクターとなるとすれば、これを明らかにする必要がある。

3-C) 実際に機械が目的の機能を行い、その結果振動状態にあるとき、機械システムに加わる外力は正弦波力ではなく、複雑な波形の力であり、そのような力がシステム内を伝達する。機械の振動特性の解析の究極の目的は、このように機械が実際に動いている状態での動特性を正確に把握し、その特性の改

善さらに最適化にあることより、実動状態の動特性の評価が可能な解析法が必要である。

以上、機械構造物の振動特性を解析する場合の問題点を1-A), 1-B), 1-C)と2-A), 2-B), 2-C)および3-A), 3-B), 3-C)の3つのグループに分類して考察した。本論文では、この問題点を解決する基本的な因子として次の1.2.3節に述べる3つの概念を導入した。このうち、1-A), 1-B), 1-C)の問題点についてはエネルギー分布、2-A), 2-B), 2-C)にはモーダルフレキシビリティ、そして3-A), 3-B), 3-C)には振動内部力がそれぞれの問題点の解明の基本であると考ええる。

1.2.3 振動特性解析のための基本的な因子

前節に考察した振動特性の解析を行う上での問題提起に対する解答を得るために、ここに各共振モードにおけるエネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力の3つの基本となる因子を考える。以下にその各因子の概念と解析を述べ、単純なモデルによる概念の説明を行う。

(i) エネルギー分布

(a) エネルギー分布の概念

機械構造は種々多数の部材がいろいろな方法により結合され1つの目的の機能をもつ機械システムを構成している。そしてそれと同時に1つの振動システムを成している。今、その機械構造(以後システムと呼ぶ)Gが、図1-1に示すようにN個の部材(以後サブシステムと呼ぶ) H_1, H_2, \dots, H_N から構成されているとする。この場合、ボルト結合部、案内面および軸受等の結合部も1つのサブシステムと考える。さらに地盤や基礎部も振動システム内に入るならば、それも1つのサブシステムとする。

一般に機械構造物は無限の数の自由度をもっており、したがって無限の数の固有振動数が存在する。その各固有振動数で共振をしているシステムにおいて、

復元エネルギー、慣性エネルギー、入力エネルギーおよび減衰エネルギーに関し、次の関係が成り立つ。

- (I) 正弦波入力に対する定常な共振状態で全システムが持つ慣性エネルギーの最大値 T_{Am} は、それが貯える復元エネルギーの最大値 V_{Am} と等しく、 $T_{Am} = V_{Am} = E_m$ と書くことができる。

- (II) 正弦波入力に対する定常共振状態で、加振力によって1サイクルごとにシステム

に加えられる入力エネルギー I_{Am} は、全システム中で消散される1サイクルあたりの減衰エネルギーの総和 D_{Am} に等しい。

いま、ある m 次の固有振動数 ω_m において、 N 個のサブシステムがエネルギー集合 (T_{1m}, V_{1m}, D_{1m}) , (T_{2m}, V_{2m}, D_{2m}) , \dots , (T_{Nm}, V_{Nm}, D_{Nm}) をもっているとする。ただし、サブシステムが結合部の場合は等価な慣性エネルギーを持たないこともあり得る。また、振動系が重減衰でない限りシステム全体の最大復元エネルギー V_{Am} 、最大慣性エネルギー T_{Am} および1サイクルあたりの減衰エネルギー D_{Am} は、それぞれすべてのサブシステムでの最大復元エネルギー、最大慣性エネルギーおよび1サイクルあたりの減衰エネルギーの和に等しく、

$$T_{Am} = \sum_{i=1}^N T_{im} \quad (1-1)$$

$$V_{Am} = \sum_{i=1}^N V_{im} \quad (1-2)$$

$$D_{Am} = \sum_{i=1}^N D_{im} \quad (1-3)$$

と書き表わせる。

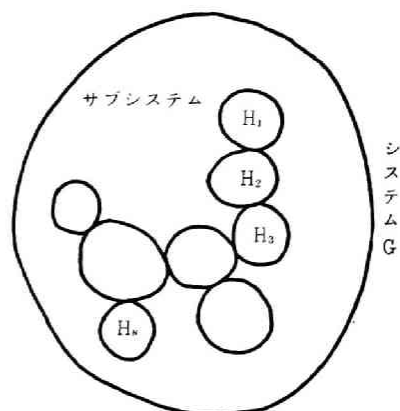


図 1-1 システムとサブシステムの説明図

一般の振動挙動の運動方程式は、慣性項、復元項、減衰項および入力項の4つによって表わせ、振動の特性はこの4つの項目で表現できる。また、上記の各種のエネルギーの値を用いて種々の特性が説明できる。振動特性評価法の問題提起の1で述べたように、振動特性解析の出発点は機械構造全体を振動システムとして考慮することである。そこで(1-1)式、(1-2)式および(1-3)式を変形し、ある固有振動数 ω_m でシステム全体の最大慣性エネルギー T_{Am} 、最大復元エネルギー V_{Am} および1サイクル当りの減衰エネルギー D_{Am} に対する各サブシステムの各種エネルギー分布の割合はそれぞれ次式中の r_{im} 、 μ_{im} 、 ν_{im} をもって表わせ、これらをエネルギー分布率と呼ぶ。

$$\sum_{i=1}^N \frac{T_{im}}{T_{Am}} = \sum_{i=1}^N r_{im} = 1.0 \quad (1-4)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{V_{im}}{V_{Am}} = \sum_{i=1}^N \mu_{im} = 1.0 \quad (1-5)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{D_{im}}{D_{Am}} = \sum_{i=1}^N \nu_{im} = 1.0 \quad (1-6)$$

各サブシステムにおける r_{im} 、 μ_{im} および ν_{im} の大きさをみることにより、そのサブシステムがその固有モードの振動特性上どのような働きをしているかを知ることができる。そしてこれらの値が十分に小さければそのサブシステムはその固有モードの特性を決定するファクターでないことがわかり、逆にこれらの値が大きければ重要なファクターであることがわかる。したがって、この r_{im} 、 μ_{im} 、 ν_{im} の値を評価することにより機械システムのどの範囲までを振動システムとして考慮すべきか、さらにどの機械要素および部材の特性に着目すべきかを明確に判断することができる。しかし一方各固有モードでの変位の分布を示す通常のモード形からのみでは上記の判断を下すことは単純なモデル等の場合を除いては不可能であり、したがって定量的な評価を行うためにはモード形を解析すると同時にこれらのエネルギー分布率をも計算することが必要

であると考えられる。

(b) エネルギー分布による減衰能の表示

次に、このエネルギー分布により各共振モードにおける減衰能を表わす。通常振動の減衰エネルギーは構造内の各部材，要素，結合部，機械支持部，地盤等において発生し，そのエネルギー消散の機構はその部分での物理的特性により種々多様であり，それらが総合されて1つの減衰能を示す。そこで，エネルギー量もちいることによりこれらの多種類の減衰能を統一して表現することができる。

いま，ある m 次の共振モードでの各サブシステムにおける1サイクル当りの減衰エネルギーがそのサブシステムの最大復元エネルギーに対してもつ比からロスファクター η_1 を次のように定義する。

$$\frac{D_{1m}}{2 \pi V_{1m}} = \eta_1 \quad (1-7)$$

この値は，サブシステムを構成する材料とそれがおかれている温度，振動数等に固有の定数である。次にシステム全体の減衰能を対数減衰率 δ_{Am} で評価することとする。このとき，(i)系のもつ復元エネルギーは振幅の2乗に比例する。(ii)1サイクル当りの減衰エネルギーの最大復元エネルギーに対する比が十分に1より小さいという軽減衰の仮定の下に， δ_{Am} はエネルギー量の比に変換できる。すなわち，

$$\delta_{Am} = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{D_{Am}}{V_{Am}} \right) \doteq \frac{D_{Am}}{2 V_{Am}} \quad (1-8)$$

と表わせる。そして(1-5)式におけるシステム全体の最大復元エネルギーに対する各サブシステムに貯えられる最大復元エネルギーの比 μ_{1m} と(1-7)式のロスファクターにより，対数減衰率 δ_{Am} は，

$$\delta_{Am} = \pi \sum_{i=1}^N \eta_{1i} \mu_{1im} \quad (1-9)$$

と表わせる。これより対数減衰率 δ_{Am} が復元エネルギー分布に依存することがわかる。

この対数減衰率の変化が復元エネルギー分布に依存するようすを実験により実証するために、図 1-2 に示すようなモデルを用いて次のように実験を行った。

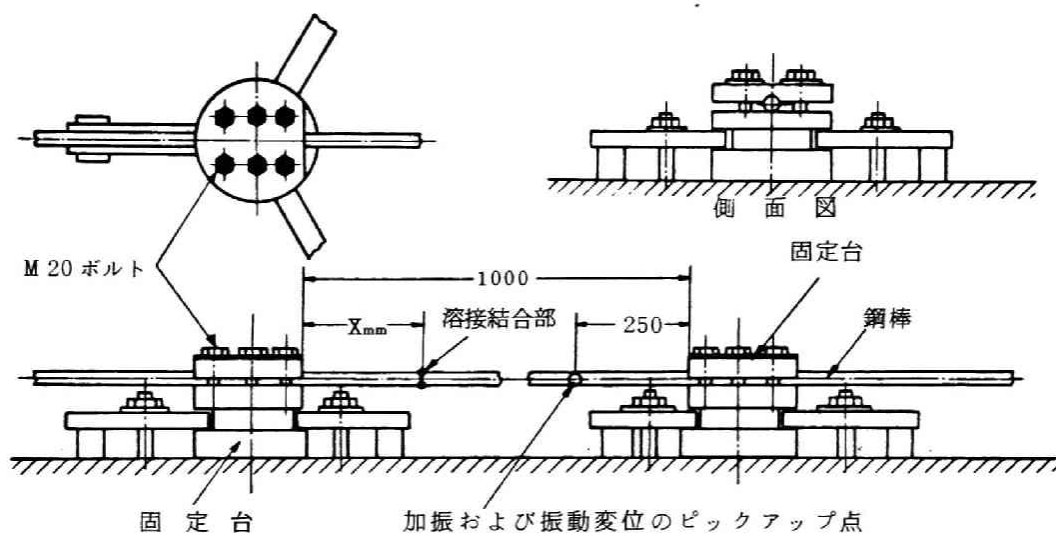


図 1-2 溶接結合部をもつ両端固定はりの実験モデル

直径 30 mm の鋼棒をガス溶接結合し、固定端間が 1,000 mm と一定になるよう両端固定し、結合部の位置を種々変えて、それぞれの場合の周波数応答を求めた。ここで固定の方法は図 1-2 に示すように 6 本のボルトを用いた固定台を使っており、さらにそれをボルトによりコンクリート基礎に固定した。また結合部の位置を変化させる場合には、この 6 本のボルトをはずし、鋼棒をずらしてから再び所定の位置に固定した。このようにして、周波数応答の結果より、カーブフィットの手法¹⁻¹⁾を用いて各次数モードの等価剛性 k_m 、等価減衰比 ζ_m を求めた。対数減衰率 δ_m は、 $\delta_m = 2\pi\zeta_m / \sqrt{1-\zeta_m^2}$ の関係式により計算をした。図 1-3 は、両端固定一様断面はりの曲げ振動の 1 次から 3 次の共振モードでの最大復元エネルギー分布の理論値を示している。図 1-4 は 1 次の共振モードにおいて、結合部の位置 x を変化させたときのリセプタンスの最大値 R_m ($R_m = 1/(2\zeta_m k_m)$)、等価剛性 k_m 、および対数減衰率 δ_m の変化の実験値を示している。この場合結合部の位置を変えても、また結合部が

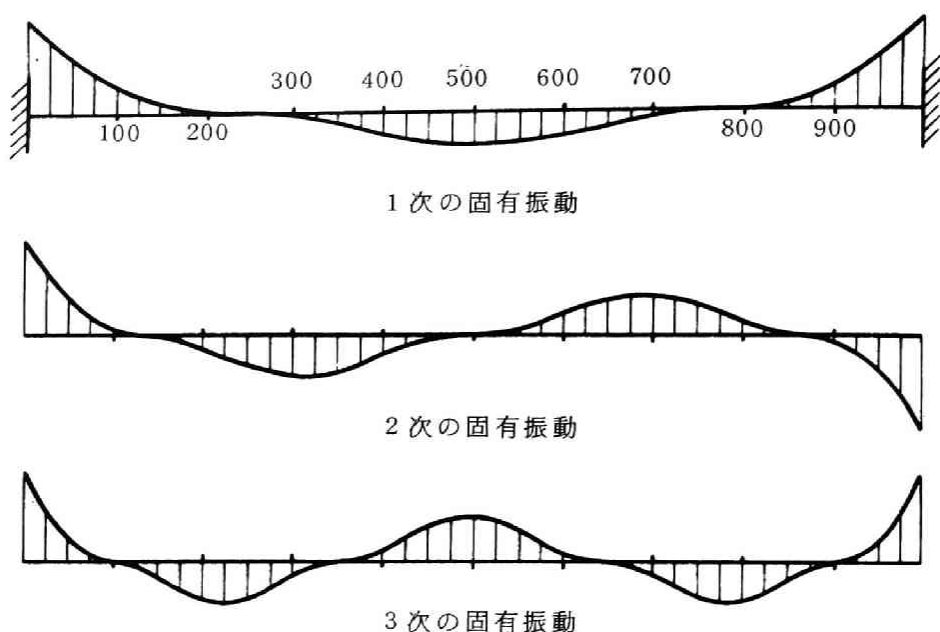


図 1-3 一様断面はりの曲げ振動の各次の復元エネルギー分布の計算値

ない鋼棒の実験においても、1 次の共振振動数はほとんど一定であり、結合部の位置 x を変化させたときの等価剛性も図 1-4 に示すようにはほぼ一定で、モード形すなわちエネルギー分布もほとんど変化しないと考えてよいことを示している。そして、対数減衰率は、結合部の位置 $x = 250 \text{ mm}$ 付近で最低を示し、すりばち状になっている。これらの結果を (1-9) 式と対応させることにより、ここで用いた溶接結合部のロスファクターは材料内部減衰のロスファクターより大きく、溶接結合部の位置と対数減衰率の関係が最大復元エネルギー分布に依存することを表わす (1-9) 式の理論を裏づけていることがわかる。

(ii) モーダルフレキシビリティ

(a) モーダルフレキシビリティの定義

ある m 次の固有モードで共振状態にある振動システムにおいて、その振動システム内の 2 つの座標 i, j 間の動的なフレキシビリティを示す値としてモーダ

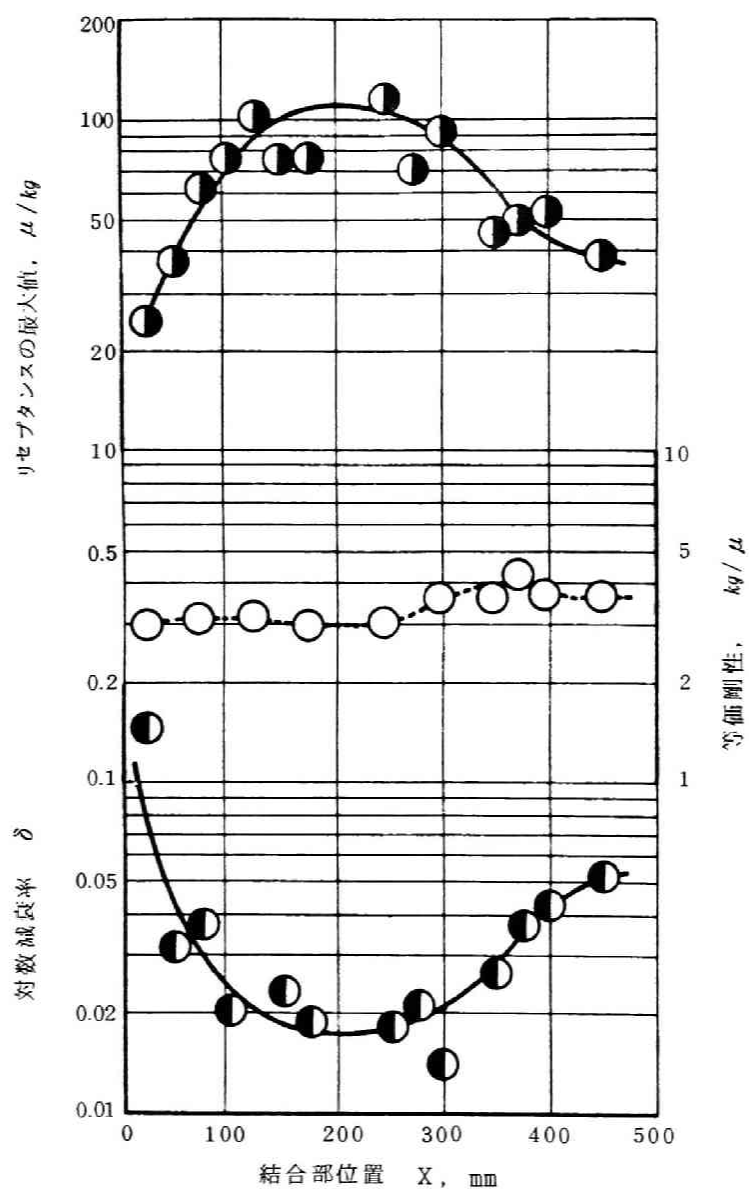


図 1-4 溶接結合部の位置の変化による第 1 次のモードにおける振動特性の変化

ルフレキシビリティ f_m をエネルギー量により、次式で定義する。

$$(f_{ij})_m = \frac{X_{im} X_{jm}}{2 V_{Am}} \quad (1-10)$$

ここに V_{Am} は (1-2) 式に示した m 次モードの共振状態におけるシステム全体の最大復元エネルギーであり、 X_{im} および X_{jm} はその変位状態での座標 i および j における変位振幅（符号を含む）を表わしている。このモーダルフレキシビリティはフレキシビリティ（変位／力）の元をもっている。また最大復元エネルギー V_{Am} は変位振幅 X の 2 乗に比例しその比例関係は減衰の大小にかかわらず一定であるから、モーダルフレキシビリティは減衰能を表わす対数減衰率とは独立なパラメータである。そして、その固有モードが軽減衰であればモーダルフレキシビリティの値は減衰の大きさにかかわらず一定の値を示す。また i 点と j 点が同一座標のときは (1-10) 式のモーダルフレキシビリティはいつも正の値であり、一方、 X_{im} と X_{jm} の符号が異なるときは負の値をとる。

(b) 単純モデルによるモーダルフレキシビリティの概念の説明

このモーダルフレキシビリティの概念を単純な計算モデルにより説明を行う。

図 1-5 は長さ l の一様円断

面片持ちはりのねじり振動モ

デルを示している。この片持

ちはりの先端に振動数 ω なる

正弦波ねじり振動力 F_{Ml} を加

える。このときはり上の x 点

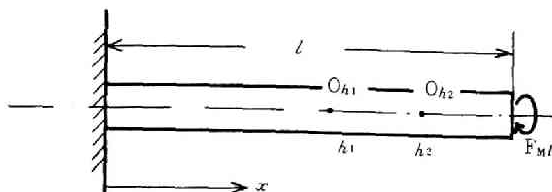


図 1-5 一様断面片持ちはりねじり振動モデル

での回転変位振幅 θ_x は、減衰を無視した分布質量はりにおいては、

$$\theta_x = \frac{\sin \lambda x}{G J \lambda \cos \lambda l} F_{Ml} \quad (1-11)$$

と表わせる。¹⁻²⁾ ここに $\lambda = \omega \sqrt{\rho/G}$ であり、 G は横弾性係数、 J はねじり剛性、そして ρ は材料の密度を表わす。この振動状態でシステム全体に貯えら

れる最大復元エネルギー V_A は、

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{GJ}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\partial \theta x}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{GJ}{2} \int_0^{\ell} \left(\frac{\cos \lambda x}{GJ \cos \lambda \ell} \right)^2 F_M \ell^2 dx \\ &= \frac{GJ}{2(GJ \cos \lambda \ell)^2} \left(\frac{1}{2} \ell + \frac{1}{4\lambda} \sin 2\lambda \ell \right) F_M \ell^2 \quad (1-12) \end{aligned}$$

として求まる。この変位状態でのはり上の h_1 点と h_2 点における回転変位振幅 θ_{h1} および θ_{h2} は、

$$\left. \begin{aligned} \theta_{h1} &= \frac{\sin \lambda h_1}{GJ \lambda \cos \lambda \ell} F_M \ell \\ \theta_{h2} &= \frac{\sin \lambda h_2}{GJ \lambda \cos \lambda \ell} F_M \ell \end{aligned} \right\} \quad (1-13)$$

として求まる。そこで (1-12) および (1-13) 式より

$$\begin{aligned} \frac{\theta_{h1} \theta_{h2}}{2 V_A} &= \frac{\frac{\sin \lambda h_1}{GJ \lambda \cos \lambda \ell} \cdot \frac{\sin \lambda h_2}{GJ \lambda \cos \lambda \ell} F_M \ell^2}{\frac{GJ}{(GJ \cos \lambda \ell)^2} \left(\frac{1}{2} \ell + \frac{1}{4\lambda} \sin 2\lambda \ell \right) F_M \ell^2} \\ &= \frac{\sin \lambda h_1 \cdot \sin \lambda h_2}{GJ \lambda^2 \left(\frac{1}{2} \ell + \frac{1}{4\lambda} \sin 2\lambda \ell \right)} \quad (1-14) \end{aligned}$$

今 m 次の共振振動数 ω_m では $\lambda = \frac{(2m-1)\pi}{2\ell}$ であることより、これを (1-14) 式に代入すると、(1-10) 式のモーダルフレキシビリティの定義より、 m 次モードにおける h_1 点と h_2 点の間のモーダルフレキシビリティ $(f_{h1 h2})_m$ は、

$$(f_{h_1 h_2})_m = \frac{\theta_{h_1} \theta_{h_2}}{2 V_{Am}} = \frac{8 \ell \sin \lambda_{h_1} \cdot \sin \lambda_{h_2}}{G J (2m-1)^2 \pi^2} \quad (1-15)$$

として定まる。これより、 h_1 点を加振点、 h_2 点を振動変位を問題とする点とすれば、 m 次固有モードでの h_1 点のねじり振動力 F_{mh_1} に対する h_2 点の回転変位 θ_{h_2} の間のモーダルフレキシビリティは (1-15) 式として求めることができる。

(c) モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する関係

以上はある 1 つの共振モードについて考えたが、すべての共振モードについての (1-10) 式のモーダルフレキシビリティを加え合わせると、それは静的なフレキシビリティ $(f_{1,j})_s$ 、静コンプライアンス、に等しくなるという下記の (1-16) 式の特性をもつ。

$$(f_{1,j})_s = \sum_{m=1}^{\infty} (f_{1,j})_m \quad (1-16)$$

このモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する関係が一般の振動システムにおいて成り立つことを無減衰の振動システムおよび減衰を含む振動システムについて以下に証明する。

(i) 無減衰振動システム

一般に機械システムは無限の数の自由度をもつが、まず簡単のために、ある機械システムが無減衰で N 自由度をもっているとする。このとき N 自由度システムは N 個の座標によって表現できるため、この N 個の座標の変位ベクトルを $\{X\}$ とする。そしてその座標に作用する外力の振幅のベクトルを $\{F\}$ とし、このシステムの質量マトリックスを $[M]$ 、剛性マトリックスを $[K]$ とすると、この振動システムに角振動数 ω の正弦波外力 $\{F\} e^{i\omega t}$ が加わったときの運動方程式は、

$$[M] \{\ddot{X}\} + [K] \{X\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (1-17)$$

と表わせる。この (1-17) 式の $\{X\}$ に $\{X\} e^{i\omega t}$ を代入すれば、その定常解は、

$$-\omega^2 \{M\} \{X\} + \{K\} \{X\} = \{F\} \quad (1-18)$$

であり、この(1-17)式を満足する任意の変位ベクトル $\{X\}$ は、各次の1次独立な固有モードの固有変位ベクトル $\{X_m\}$ の1次結合で表わされることより、 b_m を係数として次のように書ける。

$$\begin{aligned} \{X\} &= b_1 \{X_1\} + b_2 \{X_2\} + \dots + b_m \{X_m\} + \dots + b_N \{X_N\} \\ &= \sum_{m=1}^N b_m \{X_m\} \end{aligned} \quad (1-19)$$

この(1-19)式を(1-18)式に代入すると、

$$-\omega^2 \{M\} \left[\sum_{m=1}^N (b_m \{X_m\}) \right] + \{K\} \left[\sum_{m=1}^N (b_m \{X_m\}) \right] = \{F\} \quad (1-20)$$

ここで、各固有モードの固有ベクトルで成り立つ

$$\{K\} \{X_m\} = \omega_m^2 \{M\} \{X_m\} \quad (1-21)$$

の関係を(1-20)式に代入すると、

$$-\omega^2 \{K\} \left[\sum_{m=1}^N \left(\frac{b_m}{\omega_m^2} \{X_m\} \right) \right] + \{K\} \left[\sum_{m=1}^N (b_m \{X_m\}) \right] = \{F\} \quad (1-22)$$

となり、これを整理すると、

$$\{K\} \sum_{m=1}^N \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) b_m \{X_m\} = \{F\} \quad (1-23)$$

と書き表わせる。

次に各次の固有モードの固有ベクトル間の直交関係をもちいる。すなわち、 m 次の固有ベクトル $\{X_m\}$ と n 次の固有ベクトル $\{X_n\}$ ($m \neq n$) の間には、次の直交関係が成り立つ。

$$\{X_m\}^T \{K\} \{X_n\} = 0 \quad (1-24)$$

ここで $\{X_m\}^T$ は $\{X_m\}$ の転置ベクトルを表わしている。この直交関係を用いて、(1-23)式の各係数 b_m を決定する。いま、(1-23)式の各項に $\{X_m\}^T$ を左よりかければ、(1-24)式の関係より、

$$b_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2} \right) \{X_m\}^T \{K\} \{X_m\} = \{X_m\}^T \{F\} \quad (1-25)$$

となる。この式で、 $\{X_m\}^t [K] \{X_m\}$ は m 次固有モードでのシステム全体の復元エネルギーの最大値 V_{Am} の 2 倍に等しく、

$$\{X_m\}^t [K] \{X_m\} = 2 V_{Am} \quad (1-26)$$

これを (1-25) 式に代入すると、

$$2 b_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) V_{Am} = \{X_m\}^t \{F\} \quad (1-27)$$

よって係数 b_m は、

$$b_m = \frac{\{X_m\}^t \{F\}}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) V_{Am}} \quad (1-28)$$

と定まる。いまこの振動システムにおいて、1つの座標 i で加振する場合を考え、(1-28) 式の $\{F\}$ ベクトルのうちその座標 i 方向の力を F_i 、そして $\{X_m\}^t$ ベクトルのうちその座標 i 方向の変位を X_{im} とすれば、 $\{X_m\}^t \{F\} = X_{im} F_i$ であることより、(1-28) 式は、

$$b_m = \frac{X_{im} F_i}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) V_{Am}} \quad (1-29)$$

となる。そこでこの (1-29) 式を (1-19) 式に代入することにより、(1-18) 式を満足する任意ベクトル $\{X\}$ は、

$$\{X\} = \sum_{m=1}^N \left[\frac{X_{im} F_i \{X_m\}}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) V_{Am}} \right] \quad (1-30)$$

として求めることができる。次に、1つの座標 j で変位を測定する場合を考え、 $\{X\}$ ベクトルのうちその点のその座標方向の変位を X_j 、そして $\{X_m\}^t$ のうちその座標方向の変位を X_{jm} とすると、(1-30) 式は、

$$X_j = \sum_{m=1}^N \frac{X_{im} F_i X_{jm}}{2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_m^2}\right) V_{Am}} \quad (1-31)$$

となる。この (1-31) 式の関係は当然 $\omega = 0$ の静的な力がシステムに加わっ

た場合にも成立するから (1-31) 式は、

$$X_j = \sum_{m=1}^N \frac{X_{im} X_{jm} F_i}{2 V_{Am}} \quad (1-32)$$

となり、 X_j を X_{js} 、 F_i を F_{is} と置き換えて整理すると次式となる。

$$\frac{X_{js}}{F_{is}} = \sum_{m=1}^N \frac{X_{im} X_{jm}}{2 V_{Am}} \quad (1-33)$$

ここで左辺は座標 i に静的な力 F_{is} が加わったときの座標 j での変位 X_{js} との間の静コンプライアンス $(f_{i,j})_s$ であり、右辺は m 次モードのモーダルフレキシビリティの定義を示す (1-16) 式の $(f_{i,j})_m$ を N 次の固有モードにわたってたし合わせたものである。

(ロ) 減衰を含む振動システム

次に、(1-17) 式に減衰の項をつけ加え、減衰を含む振動システムの運動方程式は、

$$[M] \{\ddot{X}\} + [C] \{\dot{X}\} + [K] \{X\} = \{F\} e^{i\omega t} \quad (1-34)$$

と表わせる。この (1-34) 式の $\{X\}$ に $\{X\} e^{i\omega t}$ を代入すれば、その定常解は、

$$-\omega^2 [M] \{X\} + i\omega [C] \{X\} + [K] \{X\} = \{F\} \quad (1-35)$$

であり、この (1-35) 式を満足する任意の変位ベクトル $\{X\}$ は、各次の 1 次独立な固有モードの固有変位ベクトル $\{X_m\}$ の 1 次結合で表わされることより、 b_m を係数として、次のように書ける。

$$\{X\} = \sum_{m=1}^N b_m \{X_m\} \quad (1-36)$$

この (1-36) 式を (1-35) 式に代入すると、

$$\sum_{m=1}^N [b_m (-\omega^2 [M] + i\omega [C] + [K]) \{X_m\}] = \{F\} \quad (1-37)$$

となる。また各固有モードの自由振動の関係より (1-35) 式の $\{X\}$ に $\{X_m\}$ を代入して、

$$-\omega_m^2 [M] \{X_m\} + i\omega_m [C] \{X_m\} + [K] \{X_m\} = 0 \quad (1-38)$$

となる。また各次の固有モードの固有ベクトル間で減衰を含む系については近似的に次の(1-39)式の直交関係が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} \{X_m\}^t [K] \{X_n\} &\div 0 \\ \{X_m\}^t [M] \{X_n\} &\div 0 \end{aligned} \right\} \quad m \neq n, \quad (1-39)$$

(1-38)式に $\{X_n\}^t$ をかけ(1-39)式を適用すれば(1-40)式が成立する。

$$\{X_m\}^t [C] \{X_n\} = 0, \quad m \neq n \quad (1-40)$$

さらに、固有モードにおけるエネルギーの関係より、

$$\frac{1}{2} \omega_m^2 \{X_m\}^t [M] \{X_m\} = \frac{1}{2} \{X_m\}^t [K] \{X_m\} \quad (1-41)$$

が成り立つ。この(1-41)式の左辺がm次モードの慣性エネルギー、右辺が復元エネルギーの最大値を表わす。そこで(1-37)式の各項に左から $\{X_m\}^t$ をかけ、(1-39)式、(1-40)式を適用すると、次の(1-42)式が求まる。

$$\begin{aligned} b_m (-\omega^2 \{X_m\}^t [M] \{X_m\} + \{X_m\}^t [K] \{X_m\} + i\omega \{X_m\}^t [C] \{X_m\}) \\ = \{X_m\}^t \{F\} \end{aligned} \quad (1-42)$$

この(1-42)式を(1-41)式を用いて整理すれば、

$$\begin{aligned} b_m &= \frac{\{X_m\}^t \{F\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] \{X_m\}^t [K] \{X_m\} + i\omega \{X_m\}^t [C] \{X_m\}} \\ &= \frac{\frac{\{X_m\}^t \{F\}}{\{X_m\}^t [K] \{X_m\}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + i\omega \frac{\{X_m\}^t [C] \{X_m\}}{\{X_m\}^t [K] \{X_m\}}} \end{aligned} \quad (1-43)$$

となる。ここでm次モードでの復元エネルギーの最大値 V_{Am} と1サイクル当りの減衰エネルギー D_{Am} は、

$$\{X_m\}^t [K] \{X_m\} = 2 V_{Am} \quad (1-44)$$

$$\pi \omega_m \{X_m\}^t [C] \{X_m\} = D_{Am} \quad (1-45)$$

と求まり、また減衰比 ζ_m は

$$\zeta_m = \frac{D_{Am}}{4 \pi V_{Am}} \quad (1-46)$$

であることより (1-43) 式は

$$b_m = \frac{\frac{\{X_m\}^t \{F\}}{2 V_{Am}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-47)$$

いま、この振動システムにおいて、1つの座標 i で加振する場合を考え (1-47) 式の $\{F\}$ ベクトルのうちその座標 i 方向の力を F_i 、そして $\{X_m\}^t$ ベクトルのうちその座標 i 方向の変位を X_{im} とすれば、 $\{X_m\}^t \{F\} = X_{im} F_i$ であることより、(1-47) 式は、

$$b_m = \frac{\frac{X_{im} F_i}{2 V_{Am}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-48)$$

となり、これを (1-36) 式に代入すれば、任意ベクトル $\{X\}$ は、

$$\{X\} = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{im} F_i}{2 V_{Am}} \{X_m\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-49)$$

として求めることができる。次に、1つの座標 j で変位を測定する場合を考え、 $\{X\}$ ベクトルのうち、その座標方向の変位 X_j 、そして $\{X_m\}^t$ のうちその座標方向の変位を X_{jm} とすると (1-49) 式は、

$$X_j = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{im} F_{1i} X_{jm}}{2 V_{Am}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-50)$$

これより、

$$\frac{X_j}{F_1} = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{im} X_{jm}}{2 V_{Am}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-51)$$

この(1-51)式の右辺の分子 $X_{im} X_{jm} / (2 V_{Am})$ は(1-10)式のモーダルフレキシビリティの定義そのものでありこれを $(f_{i,j})_m$ と置きかえると、

$$\frac{X_j}{F_1} = \sum_{m=1}^N \frac{(f_{i,j})_m}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m} \right)^2 \right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-52)$$

と表わせる。これより i 点に振動数 ω の正弦波加振力 F_{1i} で加振した場合の j 点の変位 X_j の間のリセプタンス (X_j / F_1) は(1-52)式に示すような複素数の関係で表わせる。そこで(1-52)式に $\omega = 0$ を代入し i 点のその座標方向の静的な外力に対する j 点の座標方向の変位に関する静コンプライアンス $(X_j / F_1)_s$ は、

$$\left(\frac{X_j}{F_1} \right)_s = \sum_{m=1}^N (f_{i,j})_m \quad (1-53)$$

と定まる。これは(1-33)式と同様の式であり、 m 次モードのモーダルフレキシビリティの全固有モードに対する総和は静コンプライアンスに一致することを示している。

以上、(1-16)式のモーダルフレキシビリティ f_m と静コンプライアンス f_s の関係を N 自由度無減衰および減衰を含むシステムについて証明したが、当然 N 自由度を無限自由度に拡張して考えれば、(1-16)式の関係が成り立

つことが理解される。

また無限自由度系では (1-52) 式は、

$$\frac{X_j}{F_1} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(f_{1,j})_m}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (1-54)$$

と表わせる。

(d) 単純モデルによるモーダルフレキシビリティの

静コンプライアンスに対する関係の説明

(1-16) 式の関係を図 1-5 のモデルに対し検証する。(1-15) 式より

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f_{h_1 h_2})_m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{8 \ell \sin \lambda h_1 \cdot \sin \lambda h_2}{G J (2m-1)^2 \pi^2} \quad (1-55)$$

ここで、

$$\begin{aligned} & \sin \left[\frac{(2m-1)\pi h_1}{2\ell} \right] \cdot \sin \left[\frac{(2m-1)\pi h_2}{2\ell} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \cos \left[\frac{(2m-1)\pi (h_1 - h_2)}{2\ell} \right] - \cos \left[\frac{(2m-1)\pi (h_1 + h_2)}{2\ell} \right] \right\} \end{aligned} \quad (1-56)$$

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos \left[\frac{(2m-1)\pi h}{2\ell} \right]}{(2m-1)^2} &= \frac{\pi}{8} \left(\pi - \frac{\pi h}{\ell} \right) \\ &\quad \left(0 \leq \frac{\pi h}{2\ell} \leq \pi \text{ において} \right) \end{aligned} \quad (1-57)$$

の関係をもちいて、

$$\sum_{m=1}^{\infty} (f_{h_1 h_2})_m = \frac{h_2}{G J} \quad (1-58)$$

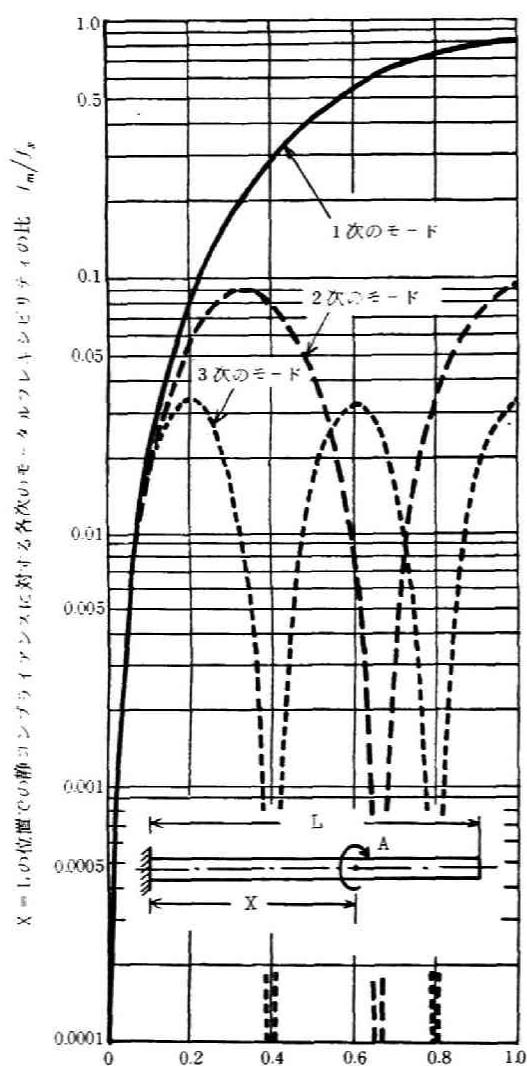
となる。

(1-58) 式の右辺の値は h_1 点に静的なねじり力を加え、 h_2 点の回転変位を求めた場合の静コンプライアンス (相反定理により h_2 点に静的なねじり力

を加え、 h_1 点の回転変位を求めた場合と同一である)に一致する。

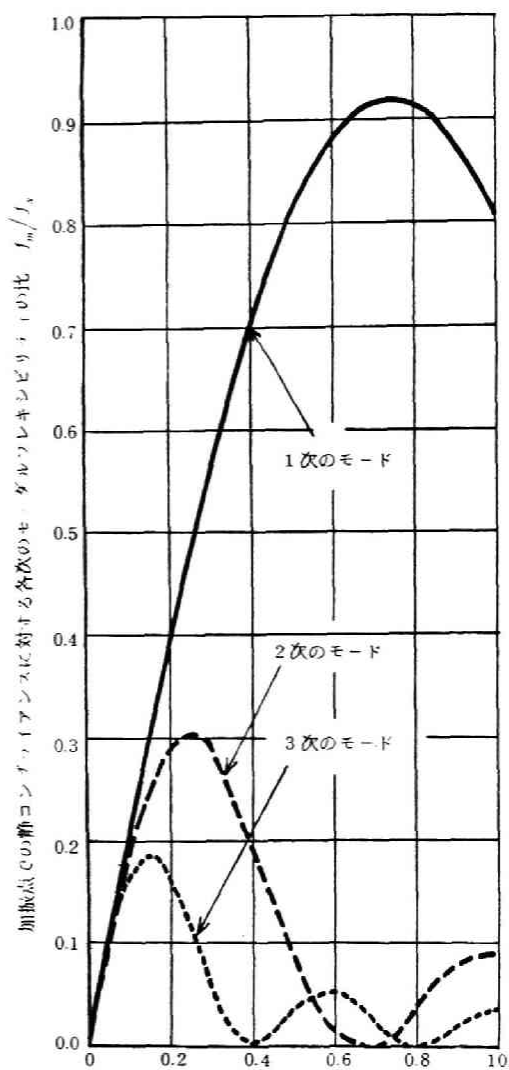
次に、この単純なモデルにおいてモーダルフレキシビリティを計算した結果について述べる。図 1-6 は図 1-5 と同じ一様断面片持ちはりモデルにおけるねじり振動による各次のモーダルフレキシビリティの計算結果を示している。このうち(a)は、はりの自由端 ($X=L$ の点)でのねじり方向の静コンプライアンス f_s を基準として、加振点 (A 点)での加振力と変位の間の各固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m が A 点の位置 X/L によってどのように変化するかを示している。すなわち、 $X=L$ での静コンプライアンスで種々の X 点でのモーダルフレキシビリティを割った値を示しており、実線が 1 次モード、破線が 2 次モード、そして点線が 3 次モードを表わしている。この数値は任意の一様断面の片持ちはりねじり振動モデルに対して適用できる。これより A 点の位置およびモード次数によりモーダルフレキシビリティが大きく変化することがわかる。また(b)図は、A 点のねじり方向の静コンプライアンス f_s で A 点のねじり振動の各次のモーダルフレキシビリティ f_m を割ったものを、A 点の位置 X/L に対してプロットしている。(a)図と同様に、この数値は任意の一様断面片持ちはりねじり振動モデルに適用できる。この図よりはりの先端で加振が行なわれるときには実線で示す 1 次モードのモーダルフレキシビリティが支配的であり、加振点のはりの固定端に近づくにつれ、高次モードがしだいに重要になることがわかる。また、各加振点 A での静コンプライアンス f_s に対する各次のモーダルフレキシビリティ f_m の比 f_m/f_s を各固有モードにわたってたしあわせると 1.0 となる。これは、(1-15)式において、 h_1 と h_2 が同一点の場合に相当する。

図 1-7 は同様の関係を一様断面片持ちはりの曲げ振動に対して示している。これを図 1-6 のねじりモデルの場合と比較すると、1 次モードのモーダルフレキシビリティがさらに支配的であることがわかる。また(b)図に示す各加振点 A での静コンプライアンス f_s に対する各次のモーダルフレキシビリティ f_m の比 f_m/f_s を各モードにわたってたしあわせると当然 1.0 となる。



加振および測定を行う点の固定端からの距離 X のはりの全長 L に対する比 X/L

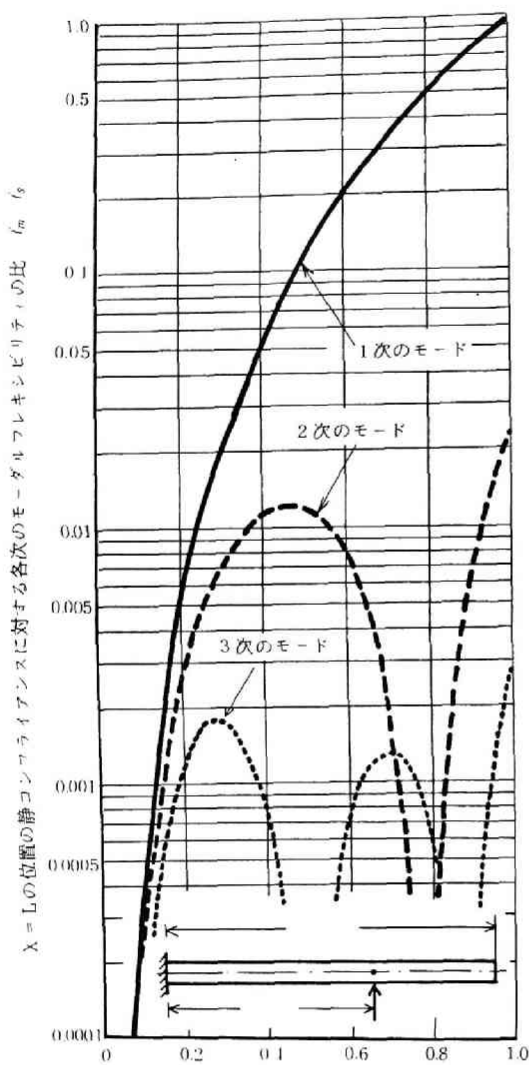
a) $X=L$ の場合の静コンプライアンスに対する各次のモーダルフレキシビリティの比



加振および測定を行う点の固定端からの距離 X のはりの全長 L に対する比 X/L

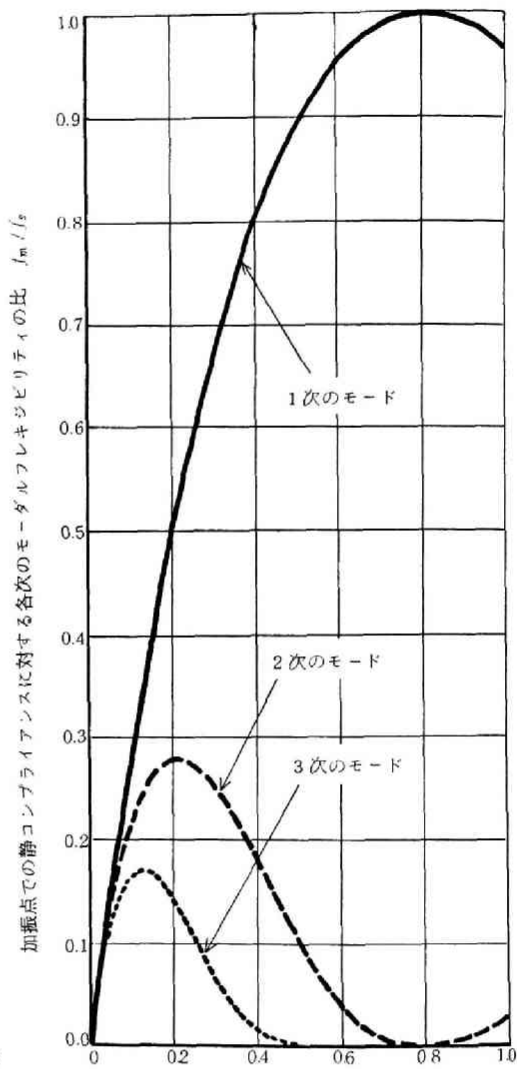
b) 静コンプライアンスに対する各次のモーダルフレキシビリティの比

図 1-6 一様断面片持ちはり上の A 点にねじり加振が行われた場合、加振点のねじれを応答とした各次のモーダルフレキシビリティの、自由端 ($X=L$ の点) および加振点 (A 点) でのねじり方向の静コンプライアンスに対する比の加振点の移動による変化の計算値



加振および測定を行う点の固定端からの距離 X のはりの長さ L に対する比 X/L

(a) $X=L$ の場合の静コンプライアンスに対する各次のモーダルフレキシビリティの比



加振および測定を行う点の固定端からの距離 X のはりの長さ L に対する比 X/L

(b) 静コンプライアンスに対する各次のモーダルフレキシビリティの比

図 1-7 一様断面片持ちはりの曲げ振動による各次のモーダルフレキシビリティの、自由端 ($X=L$ の点) および加振点 (A 点) での曲げ方向の静コンプライアンスに対する比の加振点の移動による変化の計算値

(e) モーダルフレキシビリティとエネルギー分布との関係

モーダルフレキシビリティは(1-10)式の定義に示されるようにその固有モードにおける振動システム全体のエネルギー量で表わされる。したがって、ある部材の剛性または質量の変更はエネルギー分布の変化をもたらす、それに関連してモーダルフレキシビリティの大きさが増減すると考えられる。以下に、モーダルフレキシビリティの大きさが設計変更によるエネルギー分布の変化とどのように関連するかを解析する。

ある m 次の固有モードのモーダルフレキシビリティが大きいということは、(1-10)式の定義より、同じ変位振幅 X_{im} , X_{jm} の状態において、システム全体に貯えられる復元エネルギーの最大値 V_{Am} が小さいということである。このことは、システム全体の復元エネルギーの最大値 V_{Am} はシステム全体の慣性エネルギーの最大値に等しいことより、システム全体に貯えられる慣性エネルギーが小さいと言い換えることもできる。そこで、ある m 次の固有モードにおいては、その固有ベクトル $\{X_m\}$ の間に(1-21)式と同じ次の関係が成り立つ。

$$[K] \{X_m\} = \omega_m^2 [M] \{X_m\} \quad (1-59)$$

また、この(1-59)式を転置して

$$\{X_m\}^t [K] = \omega_m^2 \{X_m\}^t [M] \quad (1-60)$$

と変形できる。ここでパラメータの微小変動による影響を考察するため、摂動法の概念を用いる。まず、(1-59)式より偏差を求め、

$$\begin{aligned} d[K] \{X_m\} + [K] d\{X_m\} &= d\omega_m^2 [M] \{X_m\} \\ &+ \omega_m^2 d[M] \{X_m\} + \omega_m^2 [M] d\{X_m\} \end{aligned} \quad (1-61)$$

となる。この(1-61)式の各項に左より $\{X_m\}^t$ を掛ければ、

$$\begin{aligned} \{X_m\}^t d[K] \{X_m\} + \{X_m\}^t [K] d\{X_m\} &= d\omega_m^2 \{X_m\}^t [M] \{X_m\} \\ &+ \omega_m^2 \{X_m\}^t d[M] \{X_m\} + \omega_m^2 \{X_m\}^t [M] d\{X_m\} \end{aligned} \quad (1-62)$$

また、(1-60)式の各項に右より $d\{X_m\}$ を掛けると、

$$\{X_m\}^t [K] d\{X_m\} = \omega_m^2 \{X_m\}^t [M] d\{X_m\} \quad (1-63)$$

が成り立つ。この(1-63)式を(1-62)式に代入して整理すると、

$$\frac{d\omega_m^2}{2} \{X_m\}^t [M] \{X_m\} = \frac{1}{2} \{X_m\}^t d[K] \{X_m\} - \frac{\omega_m^2}{2} \{X_m\}^t d[M] \{X_m\} \quad (1-64)$$

が求まる。そして(1-59)式の左辺と右辺に $\frac{1}{2} \{X_m\}^t$ を掛けると、

$$\frac{1}{2} \{X_m\}^t [K] \{X_m\} = \frac{\omega_m^2}{2} \{X_m\}^t [M] \{X_m\} \quad (1-65)$$

となり、この(1-65)式の左辺は、この $\{X_m\}$ なる変位状態でのシステム全体の復元エネルギーの最大値、そして右辺は慣性エネルギーの最大値を表わしている。これと対応して、(1-64)式の左辺は、同じ変位状態において、システムの剛性マトリックスが微少量 $d[K]$ 変化し、そして質量マトリックスが微少量 $d[M]$ 変化したときのシステム全体に貯えられる慣性エネルギーの増分を表わしており、これは(1-65)式の関係によって復元エネルギーの増分に等しい。したがって(1-64)式により、同じ変位状態でシステムの剛性マトリックス $[K]$ が微少量 $d[K]$ 変化し、質量マトリックス $[M]$ が微少量 $d[M]$ 変化したときのシステム全体に貯えられるエネルギーの増減とモーダルフレキシビリティの値の変化の関係を次のように考察することができる。

- (1) 同じ変位状態でシステム全体に貯えられるエネルギー量が大きくなることは(1-10)式のモーダルフレキシビリティの定義よりそのモーダルフレキシビリティの値が減少することであり、(1-64)式の左辺が正の値となる場合である。逆に貯えられるエネルギー量が減少することは、モーダルフレキシビリティの値が増大することであり、(1-64)式の左辺が負の値となる。
- (2) システムの剛性マトリックス $[K]$ の剛性を $d[K]$ 高める場合、(1-64)式の $\frac{1}{2} \{X_m\}^t d[K] \{X_m\}$ は正值2次形式に置き換えられることより正の値となる。したがって剛性を高めればシステム内にエネルギーが増加するため、モーダルフレキシビリティが減少することがわかる。逆に剛性を $d[K]$ 減少する場合は、 $\frac{1}{2} \{X_m\}^t d[K] \{X_m\}$ の値は負となり、システム内のエネルギーが減少するため、モーダルフレキシビリティが増大する。

(3) システムの質量マトリックス $[M]$ の質量を $d[M]$ 大きくすると、(1-64) 式の $\frac{\omega_m^2}{2} \{X_m\}^t d[M] \{X_m\}$ は同様に正の値となることより、システム内のエネルギーが減少し、モーダルフレキシビリティが増大する。逆に質量を $d[M]$ 小さくすると、 $\frac{\omega_m^2}{2} \{X_m\}^t d[M] \{X_m\}$ が負となり、システム内のエネルギーが増大し、モーダルフレキシビリティが減少する。

以上の考察により、剛性または質量の大きさを微量変化させたときのモーダルフレキシビリティの値の変化を定性的に評価できたが、次に、システム内のどの部材を変更すればモーダルフレキシビリティの値の変化が大きいかを考察する。

いま、図 1-8 に示す機械システムの概念図において、この機械システムを部材 S_1 、部材 S_2 およびその他の部材 S_3 に分割する。このときシステム全体の剛性マトリックス $[K]$ は(1-66)式のように部材 S_1 に関する剛性マトリックス $[K_{S_1}]$ 、部材 S_2 に関する剛性マトリックス $[K_{S_2}]$ および部材 S_3 に関する剛性マトリックス $[K_{S_3}]$ に分けられる。

$$[K] = [K_{S_1}] + [K_{S_2}] + [K_{S_3}] \quad (1-66)$$

このシステムの m 次モードの復元エネルギーの最大値 V_{Am} は $\frac{1}{2} \{X_m\}^t [K] \{X_m\}$ で表わされることより

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{X_m\}^t [K] \{X_m\} &= \frac{1}{2} \{X_m\}^t [K_{S_1}] \{X_m\} + \frac{1}{2} \{X_m\}^t [K_{S_2}] \{X_m\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \{X_m\}^t [K_{S_3}] \{X_m\} \end{aligned} \quad (1-67)$$

これより部材 S_1 の部分に貯えられる復元エネルギー $V_{S_1, m}$ は $\frac{1}{2} \{X_m\}^t [K_{S_1}] \{X_m\}$

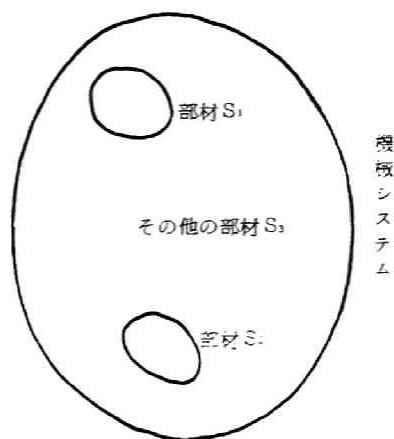


図 1-8 エネルギー分布の変化の説明図

であり V_{Am} との比を $\mu_{S_1 m}$ とする。同様に部材 S_2 では $\mu_{S_2 m}$ 、そして部材 S_3 では $\mu_{S_3 m}$ とする。いまもし

$$\mu_{S_1 m} > \mu_{S_3 m} > \mu_{S_2 m} \quad (1-68)$$

であるとし、部材 S_1 の剛性を微少量 $d[K_{S_1}]$ 増加させる場合、部材 S_2 の剛性を微少量 $d[K_{S_2}]$ 増加させる場合、そして部材 S_3 の剛性を微少量 $d[K_{S_3}]$ 増加させる場合をそれぞれ考えると、当然

$$\frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K_{S_1}]\{X_m\} > \frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K_{S_3}]\{X_m\} > \frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K_{S_2}]\{X_m\} \quad (1-69)$$

となる。これを (1-64) 式の右辺の $\frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K]\{X_m\}$ の項にあてはめると、部材 S_1 の剛性を微少量 $d[K_{S_1}]$ 高めれば、 $\frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K]\{X_m\} = \frac{1}{2}\{X_m\}^t d[K_{S_1}]\{X_m\}$ とおけるゆえシステム内に貯えられるエネルギー量をより大きく増大させそしてモーダルフレキシビリティを減少させるに最もその変化率が高いことがわかる。同様なことが質量マトリックスの変更に対してもいえ、慣性エネルギーの分布割合の最も大きい部材の質量を減少すれば、システム内にエネルギーがより多く貯えられる方向に変化しモーダルフレキシビリティが減少する変化率が最も大きいことがわかる。

以上は単一の固有モードに着目した考察であるが、このモーダルフレキシビリティの値は (1-16) 式の関係により他の固有モードと関連をもっており、もし着目する固有モードにおける慣性エネルギーの分布割合が小さい部材の質量を増加または減少すると、他の固有モードにおいてその質量の増減によるモーダルフレキシビリティの変化の方が大きくなり、着目する固有モードにおいて質量を増加または減少させたにもかかわらず、他の固有モードの影響をうけてモーダルフレキシビリティが減少または増加することがある。このことについては第Ⅳ章第3節で説明する。

また、これまでの考察とは別に、復元エネルギーの分布割合が大きい部材の剛性を下げると当然その部材にエネルギー分布が集中し、その部材に貯えられる復

元エネルギー分布のシステム全体に対する割合が増加する。逆に剛性をあげると分布割合が減少することになる。同様に慣性エネルギー分布の大きい部材の質量を大きくすると、その部材の慣性エネルギーの分布割合が増大し、質量を小さくすると減少する。

以上の考察を総合すると、着目する固有モードのモーダルフレキシビリティを減少させるには、復元および慣性エネルギーが最も大きく貯えられる部材の剛性の増大および質量の減少を行えばよく、このことは概念的に復元および慣性エネルギーをシステム内に一様に分布するように設計変更するということである。

このモーダルフレキシビリティの概念が 1.2.2 節の 2-A), 2-B), 2-C) で考察した問題提起に対して解答を与えるものであることは、次の 1.3 節の最適化設計の基本原則において説明されている。

(iii) 振動内部力

図 1-9 は多くの部材とそれらをつなぐ結合部より構成される工作機械構造の概念を表わしている。

このような機械構造がある共振モードで振動しているとき各部材の結合端に種々の振動力が伝達される。この振動力を振動内部力と呼び、この値を評価することの必要性を、構造部材または機械要素の振動特性の解析、結合部での動的剛性および減衰能の解析および実際に機械が作動している実動

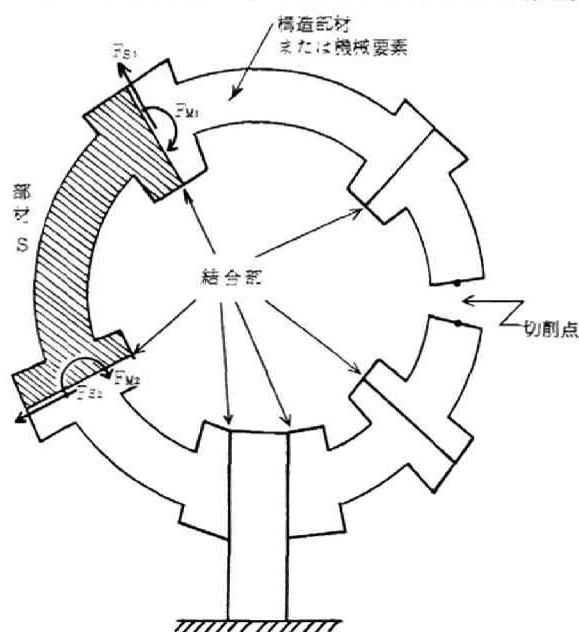
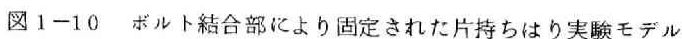


図 1-9 構造部材または機械要素とそれをつなぐ結合部より構成される工作機械の概念図

(a) 構造部材または機械要素の振動特性の解析の場合

(b) 結合部での動的剛性および減衰能の解析の場合

図1-10は、この振動内部力の大きさにより減衰能が大きく変化することを



実験と計算機シミュレーションにより確めた実験モデルである。これは重量が1トンの鋼材ブロックの側面にボルト結合により固定された鋳鉄製一様断面片持ちりのモデルで、 A_1 点もしくは A_2 点を正弦波加振した。そこで実験により加振力 F_1 もしくは F_2 の大きさを種々変えて各共振モードでの減衰比 ζ_m を測定した。これと並行して電子計算機シミュレーションにより実験系をモデル化し、測定より得られた減衰比 ζ_m と加振力を用いて、ボルト結合部の接触結合部に加わる各共振モードにおけるせん断力 F_s とモーメント力 F_M を計算した。この結果、せん断力 F_s はこれに帰因する減衰をひきおこすためにははるかに小さく、モーメント力 F_M がこの接触結合面での減衰を生じさせていると

考え、図1-11にそのモーメント力 F_M と減衰比 ζ_m の関係を1次、2次、3次の共振モードに対し示している。

これより1次の共振モードでは、その接触結合面に加わるモーメント力 F_M が $30 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ 付近を境にして、減衰比が大きく変化することがわかる。なお、この例題の解析に用いた電子計算機プログラムによるシミュレーションについてはII章で述べる解析手法を、そして実験による減衰能の測

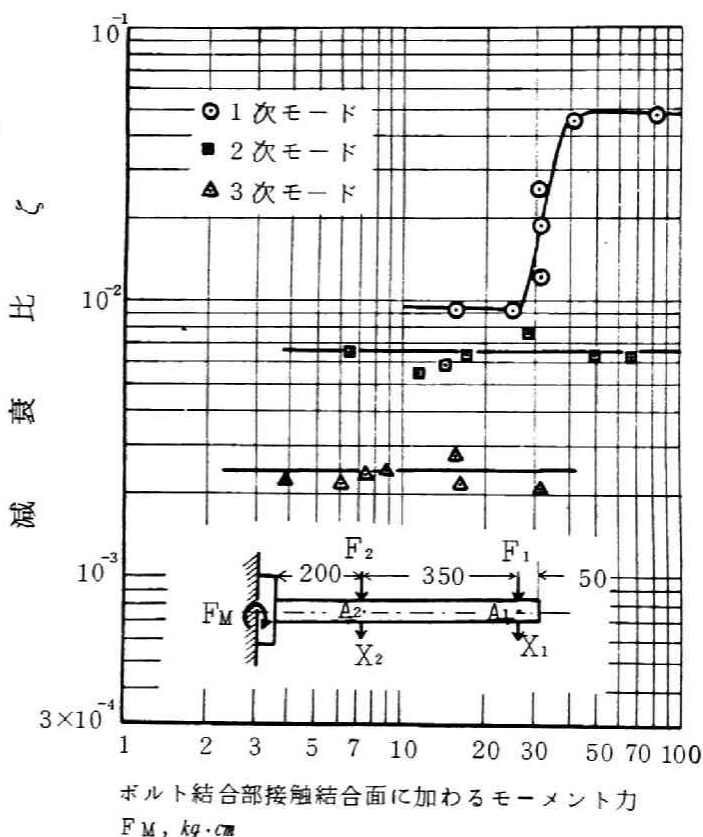


図1-11 片持ちりモデルの接触結合面に加わるモーメント力 F_M と減衰比 ζ の関係

定法ならびに振動内部力と減衰能との関係はⅢ章で述べる結合部の動的剛性と減衰能の解析を用いており、各章において詳しく説明される。

このような非線形挙動を示す結合部での動的剛性および減衰能の解析においては、振動内部力を解析することが最も重要な要因であることが理解される。

(c) 実動状態の動特性の解析の場合

機械が実際に目的とする作業を行い、その機械を構成するある機械要素が実動の状態にあるとき、その要素には種々の波形をもつ力が伝達される。この場合の動特性の解析においても機械システム全体を解析することが大前提であるが、着目する要素を他の構成要素から切り離して正確に把握しようとするれば、その要素に伝達される振動力を求めなければならない。

この振動内部力の概念はⅢ章の結合部および構造部材の解析およびⅤ章の実動状態における動特性の解析に大きな偉力を発揮する。

1.2.4 結 言

工作機械の振動特性を解析する出発点において、まず一般の機械構造物の振動特性解析の問題点を明らかとし、次にこれらの問題点を解決するための基本的な3つの因子を提唱した。このエネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力は従来の振動特性の解析においては考慮されていないものであるが、1.2.2節に述べた問題点を解決し、振動解析を学術的にも実用的にも価値のあるものにするには、必要不可欠な因子であると確信する。また、本節の概念は本論文のすべての章での基本をなすものであり、さらに工作機械に限らず一般の多くの機械にもこの概念を適用できると考える。

第 3 節 工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原則

1. 3. 1 緒 言

機械構造物の振動特性の解析の最終的な目的の 1 つは、その特性に関する設計上の改善および最適化設計を行うことである。その最適化設計を行う場合、単に数理的な最適化の技法を適用すればよいというのではなく、まず最適化を行う対象の物理的な現象を明らかにし、その特性を支配するパラメータを決定し、そしてそのパラメータの特徴を応用した手法をそれぞれの問題について見いだすことが重要であると考えられる。

本節では、設計上の改善または最適化設計を行う場合の基礎となる原理を工作機械のびびり振動を対象として述べる。びびり振動には、表 1-1 に示すように多くの種類¹⁻³⁾があり、その特性の改善に対しそれぞれについて別々の特性上の要求が存在する。このうち、最も防止が困難で、設計の段階で最適化を行う必要があるのは再生型自励びびりである。したがってここでは、再生型自励びびりに関する最適化設計を行う場合の基本的な概念および最適化を支配するパラメータの解析を行う。そして次に、そのパラメータを用いて最適化設計を実行する上で基本的な手順を述べる。本節の最適化設計の基本原則は本章第 2 節で述べた振動特性解析の基本原則に基づいており、また振動解析の 1 つの目標を与えるものである。

表 1-1 工作機械のびびり振動の分類

自励びびり	再生型びびり
	1 次びびり
強制びびり	速度型びびり
	力外乱型
	変位外乱型

1. 3. 2 再生型自励びびりに関する最適化設計の基本原則

図 1-12 は、工作機械の機能を概念的に表わした横フライス盤の数学モデルを示しており、切削点 C に着目する。A 点が工具側の切削点、B 点が工作物側の切削点であり、A B 間の切削力方向に作用する変動力に対する A B 間の切削

面に垂直な方向の相対変位のリセプタンスの周波数応答が、たとえば図1-13のように得られたとする。ここで横軸が振動数、縦軸がリセプタンスを表わしている。いま、このうちのある m 次の固有モードに着目し、その周波数応答を複素座標平面上のベクトル線図に表わしたのが図1-14である。再生型自励びりの安定限界は、リセプタンスをベクトル表示した場合の最大負実部の大きさ P_m の最大値をもつ固有モードで決定される。¹⁻⁴⁾ 一般に工作機械構造物は無限自由度系であり、したがって無限の数の固有振動数をもっている。

よってそれらがすべて再生型自励びりに関与する可能性をもつことになる。いま問題とする m 次モードの最大負実部の大きさ P_m が、それら無限に存在する固有モード中最大であったとすると、 m 次モードの共振振動数付近で再

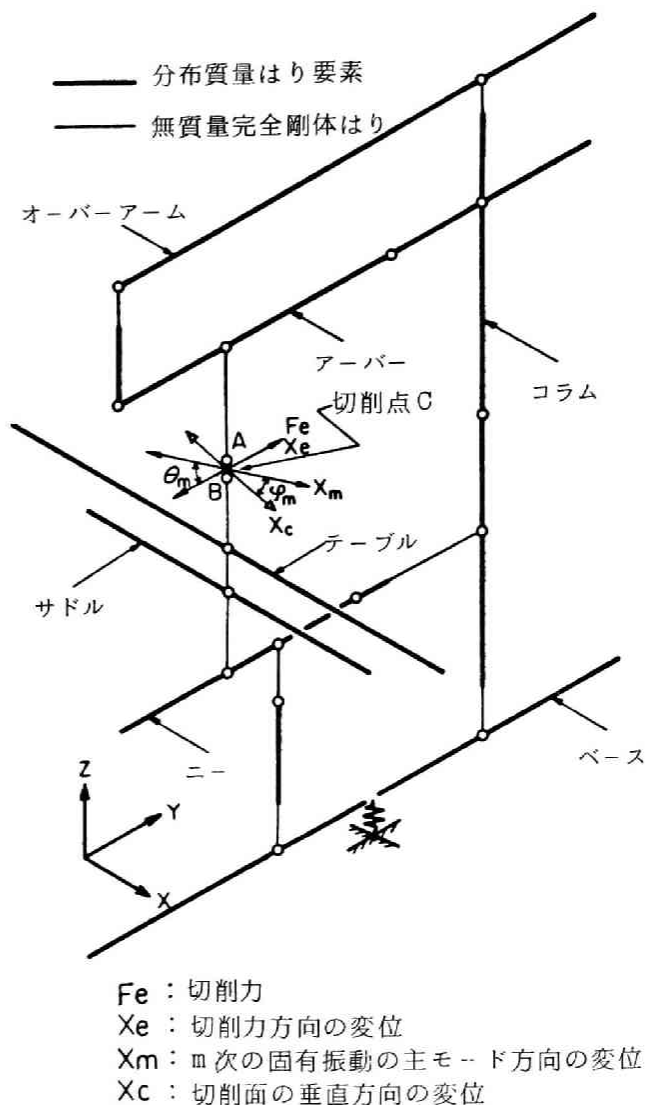


図 1-12 理論解析のためのモデル図
(横フライス盤)

生型自励びりが生ずる。そこで P_m を何らかの方法で小さくした場合、それ以外のいずれかの固有モードにおける最大負実部が m 次モードに代って最大となり、再生型自励びりはその固有モードの共振振動数付近で生ずることになる。また、これらの固有モードにおいて振動系を構成する部材または要素としては、前節に述べたように機械構造内のすべての部材または要素を考えに入れなければならない。

ゆえに、再生型自励びりに関する最適化を行うには、

(I). ある部材または要素だけに着目するのではなく、振動系を構成するシステム全体を見渡した解析

(II). すべての振動数範囲、すな

わちすべての固有モードを考慮した解析の2点がまず基本となる。

また一方、最適化設計のための基本的な流れとしては、

(III). マクロな視点より出発し、次第によりミクロな視点へ向う最適化の進行が必要であり、この手順に従えば、機械システム全体の最適化設計を真に得ることができると考えられる。次に上記の(I), (II), (III)を基として、最適化設計に

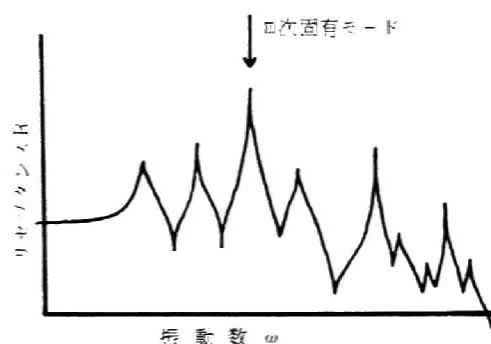


図 1-13 A B間の周波数応答の仮想例

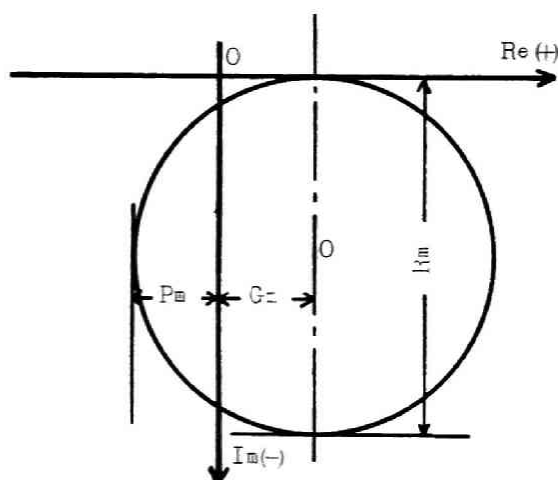


図 1-14 m 次固有モードにおけるリセプタンス周波数応答のベクトル表示

際して考慮すべきパラメータについて解析する。

1. 3. 3 最適化設計を支配するパラメータの解析

以上の概念に則り再生型自励びびりに関する最適化設計を行うには、まず振動特性としての物理的な現象を解析し、そして着目すべきパラメータとその性質を明らかにする必要がある。以下に最適化設計を支配するパラメータの解析を行う。

(i) 基本となるパラメータの解析

図1-12の切削点Cにおけるm次の固有モードのAB間の主モード方向の相対変位を X_m とする。そして切削力方向の加振力 F_e の方向と、 X_m とのなす角度を θ_m 、切削面に垂直な方向のAB間の相対変位 X_c と X_m とのなす角度を φ_m とする。このとき、定常正弦波加振状態での1サイクル当りの入力エネルギーは、1.2.3節の(i)に述べた入力エネルギーと減衰エネルギーの(II)の関係より、

$$\pi \sin \beta \cos \theta_m F_e X_m = D_{Am} \quad (1-70)$$

となる。ここに、 β は加振力 F_e に対する振動変位 X_m の位相遅れである。さらに、

$$X_c = X_m \cos \varphi_m \quad (1-71)$$

の関係をもちいて、(1-70)式を変形すれば、切削力方向の加振力 F_e と切削面に垂直な方向のAB間の相対変位 X_c に関するm次モード付近のレセプタンス $(X_c/F_e)_m$ は、(1-72)式のように定まる。

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_m = \sin \beta \cdot \cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m \frac{\pi \cdot X_m^2}{D_{Am}} \quad (1-72)$$

この(1-72)式に(1-8)式を代入すれば、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_m = \sin \beta \cdot \cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m \frac{\pi \cdot f_m'}{\delta_{Am}} \quad (1-73)$$

となる。ここで

$$f_m' = \frac{X_m^2}{2 V_{Am}} \quad (1-74)$$

であり、 f_m' は m 次の固有モードにおける工具と品物の間の主モード方向の加振力と相対変位に関するモーダルフレキシビリティであり、(1-10)式と同様の式を表わしている。また $\cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m$ は切削点での方向係数である。さらに切削力方向の A B 間の相対変位を X_e とすれば、(1-72)式および(1-73)式は、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_m = \pi \sin \beta \frac{X_e X_c}{D_{Am}} = \pi \sin \beta \frac{f_m}{\delta_{Am}} \quad (1-75)$$

と変形できる。ここに

$$f_m = \cos \theta_m \cos \varphi_m f_m' = \frac{X_e X_c}{2 V_{Am}} \quad (1-76)$$

であり、 f_m は切削点での m 次の固有モードにおける切削力と切削面に垂直な方向の相対変位に関するモーダルフレキシビリティを表わしている。このように、再生型自励びりの安定限界を決定する m 次モード付近の切削力方向の加振力 F_e と切削面に垂直な方向の相対変位 X_c に関するリセプタンス $(X_c/F_e)_m$ は、モーダルフレキシビリティ f_m と対数減衰率 δ_{Am} の 2 つのパラメータによって表わすことができる。次に、この 2 つのパラメータが振動特性上物理的にどのような性質をもっているかを考察する。

(a) モーダルフレキシビリティ

このモーダルフレキシビリティの値は、機械構造の骨組、質量と剛性の 3 次元空間での分布、および方向係数によって変化する 1 つの設計変数である。またモデル系が軽減衰のときは減衰の値のいかにかわらず(1-76)式の値の変化は微少であってモーダルフレキシビリティの値は減衰には依存しない不変量であるということができる。したがって設計図面の段階ではほぼ決定できるものであり、また設計の変更により大きく変化する値である。しかも一端設計が決まり機械が製作された後では大幅な改良はできず、設計の段階で明確に定めるべきである。

このモーダルフレキシビリティ f_m には、1.2.3 節の(ii)に述べたと同じ重要

な次の関係が成り立つ。

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_s = f_s = \sum_{m=1}^{\infty} f_m \quad (1-77)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_m / f_s = 1.0 \quad (1-78)$$

すなわち、切削点での加振力 F_e と相対変位 X_c に関する各固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m をすべてたし合わせると静的な切削力 F_{es} と相対変位 X_{cs} の静コンプライアンス f_s に一致し、各次の f_m/f_s の値は共振モード間のバランスを示している。つまり、モーダルフレキシビリティ f_m は静コンプライアンス f_s により相互に関連をもっている。これらの (1-77) 式または (1-78) 式に従えば、すべての共振モードを考慮するという最適化設計のための解析の基本Ⅱ)を実行することができると考えられる。

(b) 対数減衰率

一方、対数減衰率は減衰能を示す1つの表示法であり、1つの固有モードにおける正弦波加振状態で機械システムにおける種々の減衰機構より消散される一周期当りの減衰エネルギーの和の系全体の最大復元エネルギーに対する比として (1-8) 式で表わされる。そこで減衰の発生機構を考えると、Ⅲ章において解析するように材料内部での変動応力の大きさおよび結合面に加わる力の大きさによって減衰能が異なり、機械システム全体としての対数減衰率も変化すると考えられる。さらに、結合部における減衰等においては、機械の製作にともなう接触表面状態のばらつきが必然的に存在し、対数減衰率そのものの値はある変動範囲をもつ。また、モーダルフレキシビリティの場合は機械の製作後においては大改造を行う以外はほとんど修正ができないが、対数減衰率の値は各結合部の締め付け力、予圧、または適当なダンパーを付けることによって比較的容易に修正することが可能である。

次に、この各固有モードでの減衰能が巨視的な立場よりどのように定まるかを考察する。1.2.3節および1.3.2節で述べたように振動システムを構成する

すべての部材または要素を考える。そしてその振動システムがN個のサブシステム（結合部も1つのサブシステムとみる）より組立てられているとすると、あるm次の固有モードにおけるシステム全体の対数減衰率 δ_{Am} は、（1-79）式を変形して

$$\delta_{Am} = \sum_{i=1}^N \delta_{im} \mu_{im} \quad (1-79)$$

として表わせる。ここで、 δ_{im} は i 番目のサブシステムの対数減衰率に相当するもので、そのサブシステムの1サイクル当りの減衰エネルギー D_{im} とそのサブシステムでのその変位状態での最大復元エネルギー V_{im} の比として次の（1-80）式で表わせ、システム全体について定義された対数減衰率に対比される値である。

$$\delta_{im} = \frac{D_{im}}{2 V_{im}} \quad (1-80)$$

そして、 μ_{im} はシステム全体のもつ最大復元エネルギー V_{Am} とそのサブシステムでの最大復元エネルギーの比として（1-5）式と同じく（1-81）式で表わされる値である。

$$\mu_{im} = \frac{V_{im}}{V_{Am}} \quad (1-81)$$

いま、この固有モードにおいて対数減衰率の最も大きいサブシステムをuとしその値を δ_{um} 、対数減衰率の最も小さいサブシステムをl、その値を δ_{lm} 、そしてサブシステムuとlを除くサブシステムに等価な対数減衰率を δ_{tm} 、その部分の最大復元エネルギーを V_{tm} とすると、（1-79）式の関係より次式が成り立つ。

$$\delta_{lm} \frac{V_{lm}}{V_{Am}} + \delta_{tm} \frac{V_{tm}}{V_{Am}} + \delta_{um} \frac{V_{um}}{V_{Am}} = \delta_{Am} \quad (1-82)$$

$$\text{ここで、} \delta_{lm} \leq \delta_{tm} \leq \delta_{um} \quad (1-83)$$

の関係と（1-82）式より、次式を誘導することができる。

$$\delta_{\ell m} < \delta_{\ell m} + \frac{V_{um}}{V_{Am}}(\delta_{um} - \delta_{\ell m}) \leq \delta_{Am} \leq \delta_{um} - \frac{V_{\ell m}}{V_{Am}}(\delta_{um} - \delta_{\ell m}) < \delta_{um} \quad (1-84)$$

通常の機械構造においては、材料の内部減衰よりは結合部における減衰能の方がはるかに大きい。したがってサブシステム ℓ は結合部をもたない部材自身であり、サブシステム u は高減衰能をもつ結合部等である。この(1-84)式より、機械システム全体の対数減衰率の下限界は要素自身の下限界 $\delta_{\ell m}$ より大きく、上限界は要素での上限界 δ_{um} よりは小さいことがわかる。すなわち、機械全体のシステムとしての対数減衰率の下限界と上限界の幅は、機械要素自身の幅よりは必ず小さいことがいえ、システム全体の対数減衰率の値の存在範囲はより狭められたものとなる。

次に、この機械構造全体の対数減衰率が決定されるようすを図1-15に示す。機械構造における減衰エネルギーの発生機構として種々のものが考えられるが、その減衰エネルギーは構造が振動するという物理的現象によって発生することより、そのときに構造系自体が貯える復元エネルギーまたは慣性エネルギーと無関係であるとは考えられない。図1-15は、減衰エネルギーが復元エネルギー分布に関係するもので表現できる場合に、固有モードの振動状態で復元エネルギーが分布する状況と減衰能との関係を示したもので、横軸の長さがシステム全体の復元エネルギーに対するそのサブシステムの復元エネルギーの比 μ_s を、縦軸はそのサブシステムの減衰能力を示すサブシステムでの等価な対数減衰率を表わす。そして、各サブシステムの長方形の面積の和がシステム全体の対数減衰率 δ_{Am} に相当する。図1-15中(A)と(B)は、復元エネルギーがある1つのサブシステムに集中した場合で、このような場合には通常そのモードのモーダルフレキシビリティが大きく、また静的コンプライアンスに対する比も大きい。そのうち(A)は復元エネルギーの集中しているサブシステムの対数減衰率が高い場合で、動的コンプライアンスはある大きさに下げられる。しかし減衰能の大きなサブシステムは通常結合部その他の不確定な性質の強い非線形要素であり、減衰の発生

する大きさに限度がある。またいかに大きな減衰能をもつ結合部であっても、その結合部に加わる力の大きさがある大きさ以下のときは結合部自身では減衰は発生しない。次に(B)は復元エネルギーの集中しているサブシステムの対数減衰率が大きくない場合で、動的コンプライアンスは極度に大きくなる。また(C)は復元エネルギーが分散されバランスのとれた場合を示しており、システム全体の対数減衰率は(A)と(B)の中間の値をとる。

このように対数減衰率は各固有モード自身に固有の値であって、一般にはモーダルフレキシビリティとは異なり固有モード相互間の明解な規則による関係をもたない。し

たがって、最適化設計を行なおうとする場合に最初からある固有モードの対数減衰率に着目してしまうと、他の固有モード間との関連を系統だてて考慮でき

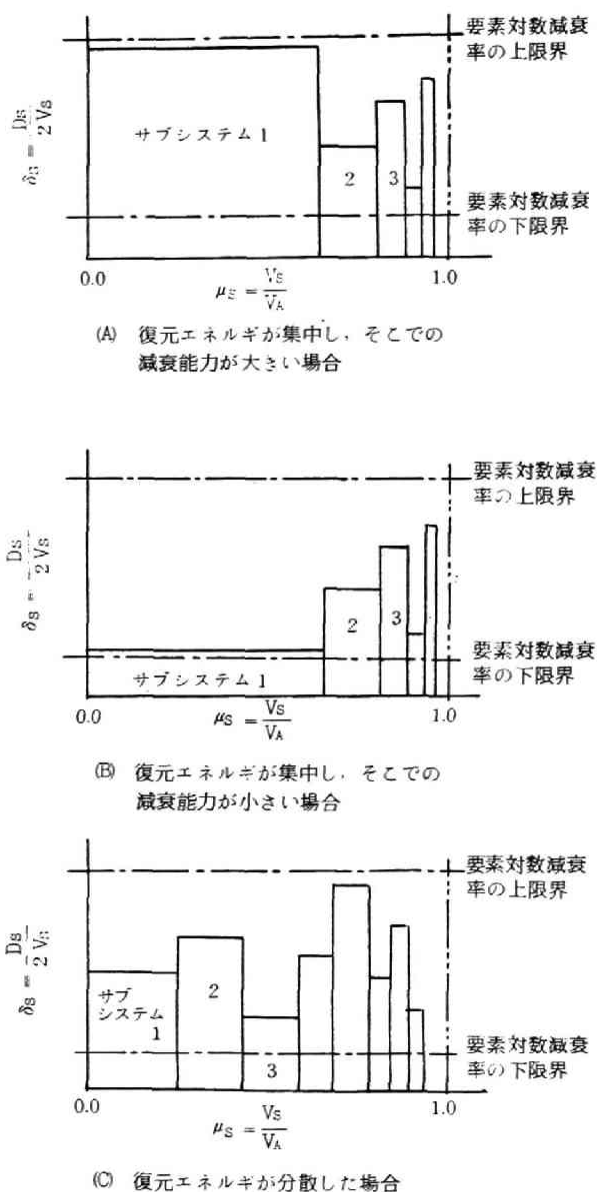


図 1-15 復元エネルギーと減衰能の関係の説明図

ないため、その特定の部材または要素の最適化に終わってしまうことになり、大
局的な視点から最適化を始めるという基本概念に反することになる。

(c) リセプタンスの最大値

再生型自動びびりの安定限界は、正確にはリセプタンスをベクトル軌跡上に
表示した場合の最大負実部の大きさによって決定されるが、ベクトル軌跡が実
軸上を大きく移動しないかぎり、最大負実部の最も大きい固有モードとリセプ
タンスの最大値をもつ固有モードとは一致する。よってリセプタンスの最大値
を設計変更により小さくすることは最大負実部を小さくすることに対応するこ
とになる。図1-16は、各次の固有モードにおけるリセプタンスが、モーダル
フレキシビリティ f_m と対数減衰率 δ_{Am} の2つのパラメータにより決定され
る様子を表わしている。ここに縦軸の実線がモーダルフレキシビリティ、横軸

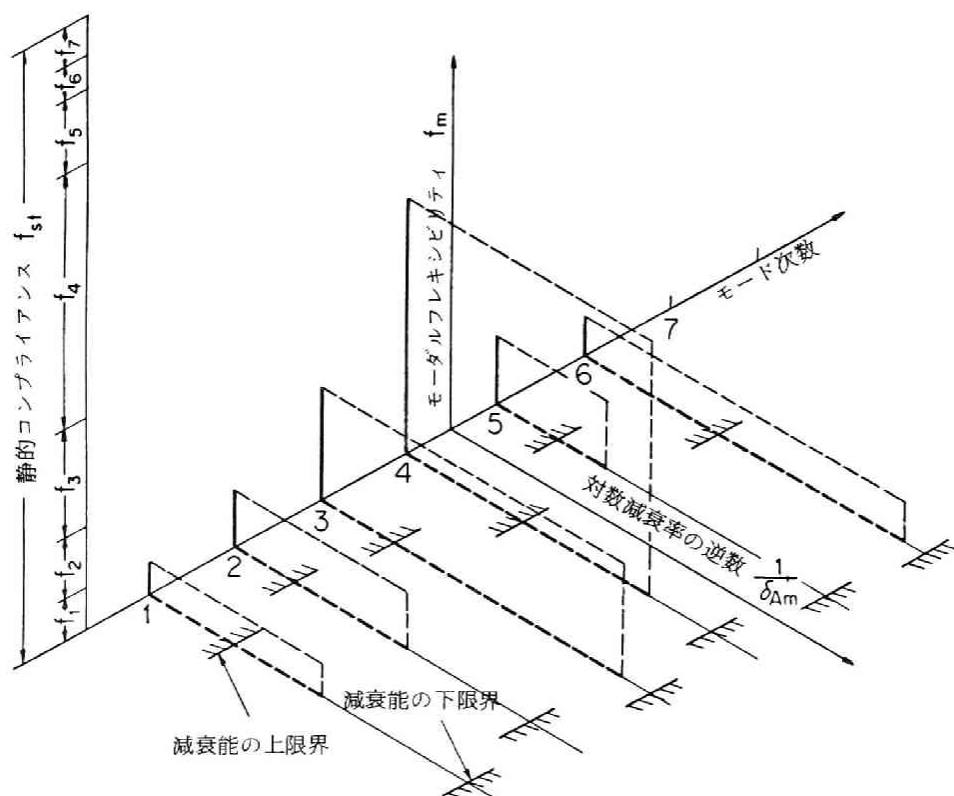


図1-16 各次固有モードのリセプタンス決定の説明図

の破線が対数減衰率の逆数で、これらが囲む長方形の面積が、各次の固有モードのリセプタンスの最大値（(1-75)式において $\beta = \pi/2$ としたときの値）を π で割った値に相当する。そこで、工作機械の再生型自励びびりを生じにくい設計という点での最適設計を行うには図 1-16 の長方形の面積が最大となる固有モードにおいて、その面積が小さくなるように設計変更を行うことである。つまり、その固有モードのモーダルフレキシビリティを小さくし、かつ対数減衰率を大きくすることに対応する。しかし、1.3.2 節で述べた最適化設計の基本概念を実行するに、そのパラメータがもつ特性の上からまずモーダルフレキシビリティに着目した最適化設計を行うことが必要である。これにより第 1 段階としての最適化設計を行うことができる。それには、最も大きなモーダルフレキシビリティをもつ固有モードのそれを下げ、これを繰り返して静コンプライアンスが多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に分配されるように設計変更することである。

(ii) ベクトル軌跡を正実部もしくは負実部方向へ移動させる

パラメータの解析

工作機械の再生型自励びびりの安定性は(1-75)式等のリセプタンスの最大値の大小ではば見当がつくが、正確には周波数応答のベクトル軌跡の最大負実部の大きさによって決まる。よって他の固有モードの影響により着目する固有モードのベクトル軌跡が複素座標平面の実軸上を移動する場合、その移動量は最大負実部の大きさの変化量に対応し、再生型自励びびりの安定性に大きな影響をおよぼす。したがって(i)に述べた基本のパラメータを基に、このベクトル軌跡が複素座標平面の実軸上を移動する場合の解析を行う必要がある。これによりさらに厳密な最適化設計のためのパラメータの評価ができる。

無限自由度をもつ構造物における各固有モード次数の周波数応答のベクトル軌跡が複素座標平面上を移動する時、

- (i). 正または負実軸方向にのみ移動
- (ii). 実軸方向だけでなく虚軸方向にも移動

の 2 つの場合があり、それぞれについて以下に考察を行う。

(a) 正または負実軸方向にのみ移動の場合

本章第 2 節 (1-54) 式の関係より m 次共振振動数付近のある振動数 ω における切削力方向の加振力 F_e と切削面に垂直な方向の相対変位 X_c に関するリセプタンス (X_c/F_e) は他の固有モードによる影響をも含め次のように表わすことができる。

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_j} \zeta_j} \quad (1-85)$$

この (1-85) 式は複素数ゆえ、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right) = \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R + i \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_I \quad (1-86)$$

のごとく実部 ($\frac{X_c}{F_e}$)_R と虚部 ($\frac{X_c}{F_e}$)_I に分けると、

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]^2 + \left[2 \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right) \zeta_j\right]^2} \quad (1-87)$$

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_I = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-2 f_j \zeta_j \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]^2 + \left[2 \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right) \zeta_j\right]^2} \quad (1-88)$$

となる。ここでベクトル軌跡の実軸方向への移動を考えるには、このうち実部成分を表わす (1-87) 式に着目すればよいが、 m 次モードのベクトル軌跡の虚軸方向の大きさの最大値はこのベクトル軌跡の直径を表わしている。したがって図 1-14 のベクトル軌跡の直径 R_m は (1-88) 式のリセプタンスの虚部を示す式に $\omega = \omega_m$ を代入して

$$R_m = \frac{f_m}{2\zeta_m} \div \pi \frac{f_m}{\delta_m} \quad (1-89)$$

と m 次モードのモーダルブレキシビリティ f_m と対数減衰率 δ_m によって表わせる。

そこでこのベクトル軌跡が、他の固有モードの影響をうけて実軸上を移動する量を解析するために、リセブタンスの実部を示す (1-87) 式に着目する。まずこの (1-87) 式を変形して

$$\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{f_j}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right] + \frac{4\left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2 \zeta_j^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_j}\right)^2\right]}} \quad (1-90)$$

とする。いま ω は ω_m 付近の振動数であることより、 ω_{m-1} 以下の P 次の共振振動数 ω_p では、 ω_p が ω_m と十分に離れていれば、

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \doteq -\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \quad (1-91)$$

と近似できる。すると (1-90) 式の右辺においてモード次数 p が 1 から $m-1$ までの総和 G_m' は

$$G_m' \doteq \sum_{p=1}^{m-1} \frac{f_p}{-\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 + 4\zeta_p^2} \quad (1-92)$$

$$\text{となり} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)^2 \gg 4\zeta_p^2 \quad (1-93)$$

であることより

$$G_m' \doteq \frac{-1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 \quad (1-94)$$

と表わせる。

一方、 ω_{m+1} 以上の q 次の共振振動数では、 ω_q が ω_m と十分に離れていれば、

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_q}\right)^2 \div 1 \quad (1-95)$$

$$4 \left(\frac{\omega}{\omega_q}\right)^2 \zeta q^2 \div 0 \quad (1-96)$$

と近似できる。すると(1-90)式の右辺において、モード次数が $m+1$ から ∞ までの総和 G_m'' は、

$$G_m'' = \sum_{q=m+1}^{\infty} f_q \quad (1-97)$$

となる。

以上の解析より、 m 次モード付近のリセプタンスの実部を示す(1-90)式は、 m 次モードを1自由度系とみなしたときのリセプタンスの実部を $\left(\frac{X_c}{F_e}\right)_{mR}$ として、次のように近似できることになる。

$$\begin{aligned} \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_R &\div -\frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega p^2 + \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_{mR} + \sum_{q=1}^{\infty} f_q \\ &= G_m' + \left(\frac{X_c}{F_e}\right)_{mR} + G_m'' \end{aligned} \quad (1-98)$$

これより、 m 次モード自身を1自由度振動系とみなしたときのベクトル軌跡を負実部方向へ移動させるのは、 $m-1$ 次以下の固有モードによる影響であり、その大きさは G_m' である。一方負実部方向へ移動させるのは $m+1$ 次以上の固有モードの影響でありその大きさは G_m'' である。ここで m 次モード自身を1自由度系としたときのベクトル軌跡が、虚軸上に中心をもつ直径 R_m で近似できる円から実軸上を移動する量を g_m とする。通常 g_m は正であることより、結局ベクトル軌跡を正実部方向へ移動させるのは m 次モード以上の固有モードであり、その大きさを G_m''' とすると、

$$G_m''' = g_m + G_m'' = g_m + \sum_{q=1}^{\infty} f_q \quad (1-99)$$

と表わせる。以上の結果すべての固有モードの影響による m 次モードのベクト

ル軌跡の正実部方向への移動量 G_m は、

$$G_m = G_m' + G_m'' = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 + g_m + \sum_{q=1}^{\infty} f_{m+q} \quad (1-100)$$

となる。

ここで (1-77) 式の関係より

$$G_m'' = f_s + g_m - \sum_{p=1}^m f_p \quad (1-101)$$

の関係をもちいて

$$G_m = f_s - \sum_{q=1}^m f_q - \frac{1}{\omega^2} \sum_{p=1}^{m-1} f_p \omega_p^2 + g_m \quad (1-102)$$

となる。したがって、問題とする固有モード以外の固有モードに帰因するベクトル軌跡の実軸上の移動量は他の固有モードの共振振動数とその固有モードの共振振動数から十分離れていれば各固有モードのモーダルフレキシビリティと共振振動数の関係によって決定され、減衰には無関係である。

次に、最大負実部の大きさを P_m とすれば、

$$P_m = \frac{R_m}{2} - G_m = f_m \left(\frac{\pi}{2\delta_m} + 1 \right) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \left(1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 \right) - f_s - g_m = f_m \left(\frac{\pi}{2\delta_m} - \tau \right) + \sum_{i=1}^{m-1} f_i \left(\frac{\omega_i^2}{\omega^2} \right) - \sum_{j=1}^{\infty} f_{m+j} \quad (1-103)$$

と表わせる。ここに $\tau = g_m/f_m$ であり、 m 次固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m に対するその固有モードを 1 自由度系とみなしたときの正実軸上の移動量 g_m の比である。(1-103) 式より m 次モードの最大負実部の大きさ P_m が小さいためには、その固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m が小さく、対数減衰率 δ_m が大きく、かつ $m+1$ 次以上のモーダルフレキシビリティの和が大きく、そして $m-1$ 次以前の固有モードのモーダルフレキシビリティが小さいか、あるいは大きい固有モードが存在してもその固有モードの共

振振動数が m 次モードの共振振動数と十分に離れていることが必要である。また (1-103) 式に従い、 $m+1$ 次モード以上の振動特性がわからなくても、 m 次モードまでの振動特性により無限自由度をもつシステムの m 次モードの最大負実部の大きさ P_m を求めることができる。

また、再生型自動びびりに関する最適化設計を行うに、問題となる大きなモーダルフレキシビリティをもつ m 次の固有モードのベクトル軌跡をびびりに対して安定側の正実部方向に移動させるには、正実部方向への移動をもたらすのは $m+1$ 次以上の固有モードのモーダルフレキシビリティの和であることより、概念的には、静コンプライアンスをできるだけ多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に分布させるという (i) の第 1 段階の最適化と一致する。

(b) 実軸方向だけでなく虚軸方向にも移動の場合

これは、共振振動数が接近した 2 つ以上の固有モードをそれぞれ単純 1 自由度モデルとみなしたとき、各モードのリセプタンスの虚軸方向成分をもつ振動数範囲が重なるときで、通常モード連成に相当する。この時、図 1-17 に示すように 2 つのパターンがある。(A) は、小さい方のベクトル軌跡が正実部方向へ大きく移動している場合で、連成を行う 2 つのモードにおいて、ベクトル軌跡の小さいモードがベクトル軌跡の大きなモードより共振振動数が低い場合で

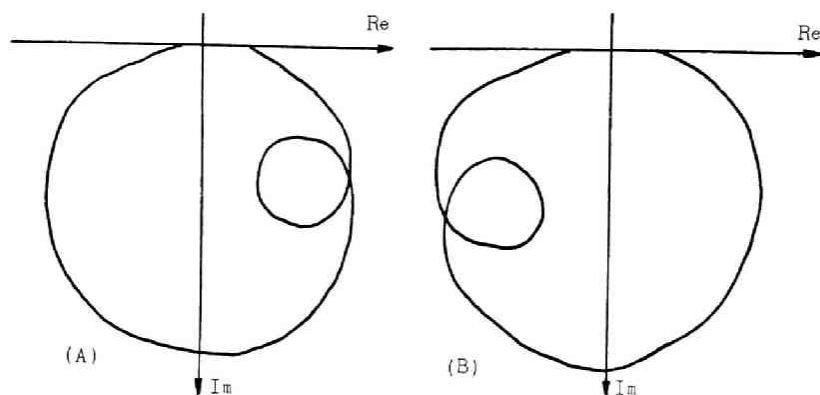


図 1-17 2 つの固有モードが連成する場合のベクトル線図

ある。(B)は、ベクトル軌跡の小さいモードの共振振動数が、ベクトル軌跡の大きいモードの共振振動数より高い場合である。(A)、(B)とも、ベクトル軌跡の全体の形は直径の大きいベクトル軌跡に支配され、直径の小さい方のベクトル軌跡が大きい方のベクトル軌跡を実軸上移動させる量は、大きなベクトル軌跡が小さいベクトル軌跡に及ぼすほど大きくない。よって、再生型自動びびりの安定性には、(a)の場合ほど重要ではない。

(iii) 構造の骨組および切削点での方向係数により支配される

パラメータについての考察

工作機械の最適化設計を行う対象として、

(a). 既に完成した工作機械に対し最適化を行う改造設計

(b). 新しく設計する機械に対する最適化設計

の2つの場合がある。(a)の場合は、構造の骨組がすでに与えられた場合の設計および製造後の機械に対する小規模な改造設計を行う場合であり、通常、骨組をも最適化設計のパラメータとして自由に選定することはできない。一方(b)の場合には、構造の骨組および切削点での切削力方向と切削面に垂直方向に対する各固有モードの主モード方向の間の方向係数の変化を最適化設計のパラメータとすることができる。工作機械として同一の機能をもつ種々の骨組に対し振動特性をパターン化することが必要であるが、骨組の変化による振動特性の変化は最適化を支配するパラメータのうち、主としてモーダルフレキシビリティの変化として現われ、減衰特性の変化は付随的なものと考えられる。

骨組の変更は切削点での方向係数の変化とも関係し、方向係数を変化させるために骨組を変えることも考えられるが、同一の骨組構造においても、より最適な方向係数をもつように切削力および切削面に垂直な方向を選択することが必要である。いま、図1-12において、 m 次固有モードのA B間の主モード方向の相対変位を X_m とし、切削力方向の加振力 F_e の方向と X_m とのなす角度を θ_m 、切削面に垂直な方向のA B間の相対変位 X_c と X_m とのなす角度を ϕ_m とする。すると、(1-76)式の切削力方向と切削面に垂直な方向のモーダル

フレキシビリティ f_m と A B 間の相対変位の主モード方向のモーダルフレキシビリティ f_m' の間には (1-76) 式と同じ次の (1-104) 式の関係がある。

$$f_m = \cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m \cdot f_m' \quad (1-104)$$

ここに、 $\cos \theta_m \cdot \cos \varphi_m$ は通常方向係数と呼ばれるものに相当する。この方向係数の変化はモーダルフレキシビリティの変化そのものであり、この値は各次の固有モードにおいて異なる。よって、方向係数を変更することにより各次の固有モードのモーダルフレキシビリティの分布を変更しうることがわかる。

以上の再生型自励びびりに関する最適化設計を支配するパラメータの解析より次のことが明らかとなった。

- (1) 最適化設計を支配する基本となるパラメータは、モーダルフレキシビリティと対数減衰率の2つであり、特性のまったく異なる2つのパラメータを明確に区別することが必要である。
- (2) モーダルフレキシビリティは静コンプライアンスと関連して各固有モード間の関係をもっている。一方、減衰能を示す対数減衰率は各固有モード自身の値であってモーダルフレキシビリティのように各固有モード間に一般性のある関係をもたない。よってすべての固有モードを考慮し、マクロな視点での最適化を始めるには、まずモーダルフレキシビリティの値に着目すべきである。
- (3) 第1段階としての最適化設計では、まず問題となる固有モードのモーダルフレキシビリティの値を下げるように設計変更し、後に対数減衰率についての最適化を行うことが必要である。
- (4) 再生型自励びびりに関する安定判別は、正確にはリセプタンスをベクトル軌跡上に描いた場合の最大負実部の大きさによって決定されることより、さらに厳密な最適化を行うにはベクトル線図の実軸上の移動量を求めることが必要である。このベクトル線図の実軸上の移動の解析より、移動量は各次のモーダルフレキシビリティの配分と各次の共振振動数の値で定まり、減衰には

無関係である。したがって各次のモーダルフレキシビリティの値の配分を考慮することによって第2段階として最適化設計を実行できる。なお、ベクトル軌跡のびびり振動に対して安定な正実部方向への移動は、概念的には静コンプライアンスをできるだけ多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に配分することによって達せられる。

- (5) 切削点での方向係数の変化はモーダルフレキシビリティの変化として現われ、さらに構造の骨組の変化も主としてモーダルフレキシビリティの変化として現われる。

ここで行った最適化設計を支配するパラメータの解析に基づき、次節に最適化設計を行う場合の基本的な手順を述べる。

1. 3. 4 最適化設計の基本的な手順

表1-2は構造の骨組が与えられた場合の再生型自励びびりに関する最適化設計の基本的な手順を示している。まずその初期設計に対し剛性Kおよび質量

表1-2 骨組が与えられた場合の最適化の手順

変数	モーダルフレキシビリティに対する最適化		減衰特性の最適化	着目するモード次数
	剛性 K	質量 M	減衰 C	
最適化の手順	問題となりうるモードの判定			全モード
			問題となりうるモードに対して減衰特性の推定	問題となりうるモードの数 N_1 個
	問題となるモードの決定			N_1 個のうちのいくつかのモード N_2 個
	剛性Kの分布の改良	質量Mの分布の改良		N_2 個のモード
			減衰Cの値および分布の改良	N_2 個のモードのうちの N_3 個のモード

ここで $N_1 \geq N_2 \geq N_3$

Mの分布により決定される切削点での切削力方向と切削面に垂直な方向におけるモーダルフレキシビリティを(1-76)式に従って計算する。(1-77)式が示すように、すべての固有モードのモーダルフレキシビリティの和は静コンプライアンスに一致するため、ある有限の数の固有モードにおけるモーダルフレキシビリティの和が静コンプライアンスにはほぼ近くなれば、それ以外の固有モードは再生型自励びりの安定性の判定には関与せず考慮しなくてよいことになる。実際には、多くの場合最低次から数次までのモーダルフレキシビリティを計算すれば静コンプライアンスに近くなり、それ以上の次数の固有モードに対する計算は不要となる。表1-2の最適化の手順1において全固有モードのうち、このモーダルフレキシビリティの大きな N_1 個のモードを選択する。この N_1 個の固有モードは再生型自励びりに関与する可能性をもっており、最適化の手順2においてこれらの固有モードの減衰特性を推定する。初期設計において各要素および結合部の減衰係数のデータが与えられていてもその段階でシステム全体の対数減衰率を推定することはできず、1.2.3節に述べたように結合部に加わる力の加わり方と大きさによって減衰係数が変化する非線形性のため、モード形が求まった後に始めて正確な減衰比が定まる。よって問題となりうる固有モードに対して対数減衰率を(1-79)式およびⅢ章の解析によって求める。これにより問題となりうる固有モードのリセプタンスの最大値が(1-75)式により求まり、実際に問題となる N_1 個のうちの N_2 個の固有モードが決定される。この問題となる N_2 個の固有モードに対し、表1-2の最適化の手順4に示すように、モーダルフレキシビリティを下げるよう設計変更を行う。それには(1-4)式および(1-5)式に示す慣性エネルギー分布率および復元エネルギー分布率を計算し、どのサブシステムに慣性および復元エネルギーが集中しているかを見つけ、そのサブシステムの設計変更を行う。すなわち1.2.3節(ii)のモーダルフレキシビリティとエネルギー分布との関係の項で述べたように慣性エネルギーが集中しているサブシステムの質量を小さくし、復元エネルギーが集中しているサブシステムの剛性を高め、システム内にエネルギーが一樣

に分布する方向に制約条件と照らし合わせて設計変更を行う。この設計変更を繰り返すことにより大きなモーダルフレキシビリティを下げ、静コンプライアンスをできるだけ多くの固有モードに均等に分配する。これにより最大のモーダルフレキシビリティを下げると同時に 1.3.3 節の(Ⅲ)に解析したようにベクトル軌跡をびびりに対して安定な正実部方向に移動させることができる。次に、このモーダルフレキシビリティがある程度下った状態において表 1-2 の最適化の手順 5 に示す減衰 C の値および分布を改良する。すなわち、モーダルフレキシビリティが大きな固有モードにおいて対数減衰率 δ_{Am} を大きく選ぶ。このために、基本的には (1-79) 式よりわかるように大きな最大復元エネルギー分布をもつサブシステムに大きな減衰能を与える等の設計変更を行う。

ここで述べた再生型自励びびりに関する最適化設計の手順はその基本的なものであり、具体的な手法およびこの最適化をさらに発展させた手法をⅣ章に示す。

1.3.5 結 言

工作機械のびびり振動のうち、最も防止が困難で、しかも設計の段階でそのびびりを生じにくい最適な設計を行う必要がある再生型自励びびりに関する最適化設計の基本原則について解析した。まず、その最適化を行う上での基本概念を述べ、その概念に則り最適化設計を支配するパラメータを解析し、そしてそれらのパラメータを用いて最適化設計を行う基本的な手順を述べた。

振動特性解析の最終的な目的の 1 つは、その特性を把握し、その特性に関する最適化を行うことであるが、振動特性を測定し、計算する時点においても目的とする基本原則が不明確であれば、その目的には到着できないと考えられる。したがって、本節で解析した基本原則は以下の章の 1 つの目標を示すものである。

第 4 節 結 論

本章において、工作機械の振動特性を解析する場合の最も基本となる原理と、解析の究極の目的の1つである最適化設計の基本原理について述べた。

まず、振動特性解析の問題点についての考察より、振動特性解析のための基本的な因子として各固有モードにおけるエネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力の3つを挙げた。これらは、従来の振動解析においては考慮されなかった新しい概念であるが、振動解析および最適化の最も重要な因子であると考ええる。この振動解析の基本原理は、工作機械に限らず一般の機械にも適用しうるものである。

次に、工作機械の振動特性に関する最適化設計を行う上での基本原理を解析し、最適化の基本概念、最適化を支配するパラメータおよび最適化設計の基本的な手順について考察した。

以下の章ではこれらの解析の基本原理と最適化設計の基本原理の2つの原理に基づいて解析を進める。また、次章で述べる電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解析法は、これらの解析を行うための手段となるものである。

第Ⅱ章 電子計算機プログラムによる 構造物の静剛性および 振動特性解析法

第1節 緒 論

機械構造物の振動特性を解析する場合、その特性を実験により測定するほかに、その振動特性を理論的に把握しなければならない。しかし実際の機械構造は複雑であり、その理論解を正確に求めるには電子計算機プログラムによる数値解析を行うことが必要である。

現在までに振動特性解析のための種々の電子計算機プログラムシステムが開発されているが、その解析手法を構造のモデル化の方法により分類すると、

(i) 構造物をいくつかの集中質量とそれをつなぎあわせる質量のない弾性はりで近似する

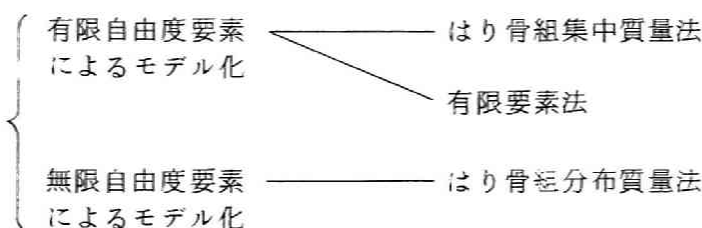
— はり骨組集中質量法 (lumped mass-beam method)

(ii) 分布した質量をもつはり構造による

— はり骨組分布質量法 (distributed mass-beam method)

(iii) 有限要素法²⁻¹⁾ (finite element method)

がある。これらはさらに、次に示すように有限自由度をもつ要素としてモデル化している場合と無限自由度をもつ要素としてモデル化する場合に分けることができる。



第Ⅰ章第2節で述べたように、実際の機械構造は振動特性解析上無限自由度をもっており、無限の数の固有振動数が存在する。したがって、その機械構造を

無限自由度要素でモデル化することが理想である。しかし、実用的な見地からは、解析する構造または部材の形状または必要とする固有モード次数等により上記の3つのモデル化の方法を適宜使いわけることが重要である。

現在までに工作機械の振動特性解析のための種々の電子計算機プログラムが開発されており、はり骨組集中質量法^{2-2), 2-3), 2-4)}と有限要素法^{2-5), 2-6)}による解析例が発表されているが、筆者はまず、はり骨組分布質量法の1つであり無限自由度要素をモデル化できる手法として、第2節で述べるリセプタンス合成法電子計算機プログラムシステムを開発した。さらに、はり骨組集中質量法、はり骨組分布質量法および有限要素法の3つのモデル化の手法を結合した新たな手法として第3節で述べる動剛性合成法電子計算機プログラムシステムを開発した。

従来の電子計算機プログラムによる振動特性解析の多くは単に構造物の固有振動数とモード形を求めるにとどまっているが、第1章で考察したように振動特性をより正確に把握しその特性の改善さらに最適化設計を行うには、固有振動数とモード形の情報だけでは不十分である。そこでリセプタンス合成法および動剛性合成法プログラムシステムでは、第1章の振動特性の解析および最適化の原理にもとづき、次に示す諸値を求めるようプログラム化されている。

- (1) 静コンプライアンス
- (2) 共振振動数
- (3) 静的および共振状態でのモード形
- (4) 共振モードでの問題とする構造上の点におけるモーダルフレキシビリティ
- (5) 静的および共振状態での復元、慣性および減衰エネルギー分布
- (6) 接合面および結合部での振動内部力
- (7) 各共振モードでの減衰比
- (8) 各共振モードでのベクトル線図

これらの値は、第III章以下の解析に重要な情報を与えるものである。

本章第2節および第3節において、リセプタンス合成法および動剛性合成法電子計算機プログラムシステムの解析の原理と計算の方法および解析例について述べる。

第 2 節 リセプタンス合成法電子計算機プログラムシステム

2.2.1 緒 言

リセプタンス合成法電子計算機プログラムシステムは、複数個の部材よりなる立体構造物の振動特性を、各部材のリセプタンスを合成することにより理論的に求めるためのものである。この方法は R. E. L. Bishop と D. C. Johnson²⁻⁷⁾ が基礎的な解析をしているリセプタンスの合成の概念をもちいており、このプログラムシステムでは分布質量をもつ無限自由度はり、無質量ばね、集中質量および減衰要素によるモデル化が可能である。そこで、解析の原理および計算の方法を述べ、そして次にこの解析手法の適用例を実験による測定との比較により示し、その手法の妥当性を実証する。

2.2.2 解析の原理

機械構造はいろいろな部材から組立てられ、1つの振動系を構成している。振動系をシステムあるいは要素と呼ぶことにする。システムのある点 A に振動力 \hat{f} が作用しているとする。今その角振動数を ω として力を

$$\hat{f} = F e^{i\omega t} \quad (2-1)$$

と表わす。F は力の振幅である。この時、システムのある点 B がある座標方向 x に同じ角振動数で振動するならば

$$x = X' e^{i(\omega t + \varphi)} = X e^{i\omega t} \quad (2-2)$$

と表わすことができる。X' は変位の振幅であり、 φ は力との位相差である。この力と変位の関係を

$$x = a F e^{i\omega t} = a \cdot \hat{f}, \quad a = \frac{x}{f} = \frac{X}{F} = \frac{X'}{F} e^{i\varphi} \quad (2-3)$$

と表わす。(2-3) 式中の a がリセプタンスと呼ばれるものである。この考え方を進めて系の n 個の点 A_1, A_2, \dots, A_n に同一角振動数の振動力 $F_1 e^{i\omega t}, F_2 e^{i\omega t}, \dots, F_n e^{i\omega t}$ が作用し、点 B がある座標方向 x_1 に同じ角振動数で振動し、

$$x = X'_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} = X_1 e^{i\omega t} \quad (2-4)$$

と表わせるとき、これらの力と変位の関係は系の振動が線形振動であることを仮定すれば

$$X_1 = \alpha_{11} F_1 + \alpha_{12} F_2 + \cdots + \alpha_{1n} F_n \quad (2-5)$$

と表わせる。同様な考え方で異なる位置と方向の m 個の変位について考えると、つぎのように行列で表わすことができる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (2-6)$$

α_{ij} は ω の関数であり、減衰を持つシステムについて考えると一般に複素数となる。システムは図 2-1 に示すように幾何学的形状が比較的単純な同一材料

でつくられたはりとか板のサブシステムに分解できる。サブシステムのリセプタンス

α_{ij} は弾性体の振動理論より計算することができる。各サブシステムに作用する力は、

それと結合しているサブシステムから伝わってくると考えサブシステム間の結合部を力の作用点とする。また切削力など外力の作用する点も力の作用点とする。座標方向は、システムが 3 次元、2 次元、1 次元運動を行なう各場合に
 応じて、一つの結合部について

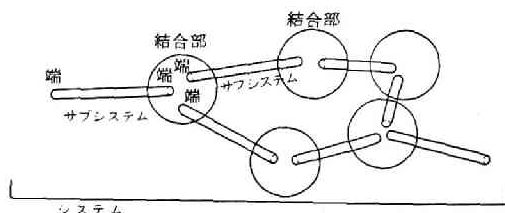


図 2-1 システムおよびサブシステムの説明図

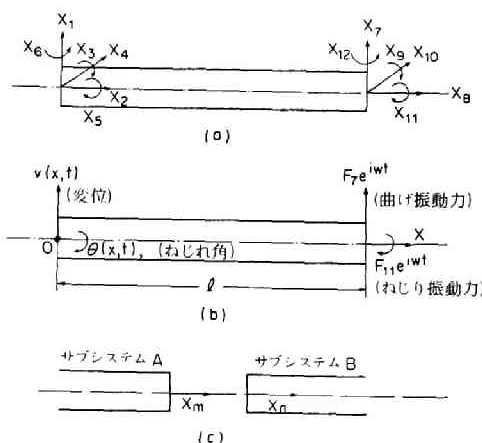


図 2-2 リセプタンス合成の説明図

てそれぞれ 6 方向, 3 方向, 1 方向にとる。

いま, 3 次元運動の場合の簡単な例として, 単純形状に分解されたサブシステムが図 2-2 (a) に示すような断面一様のはりであるとする。はりの左端に x_1, x_2, \dots, x_6 はりの右端に x_7, x_8, \dots, x_{12} の座標方向を考える。各座標方向に振動力 $F_1 e^{i\omega t}, F_2 e^{i\omega t}, \dots, F_{12} e^{i\omega t}$ が作用しているとする。ただし $F_3 e^{i\omega t}, F_6 e^{i\omega t}, F_9 e^{i\omega t}$ および $F_{12} e^{i\omega t}$ は曲げモーメントであり, $F_5 e^{i\omega t}$ と $F_{11} e^{i\omega t}$ はねじりモーメントである。両端における各座標方向の変位を $X_1 e^{i\omega t}, X_2 e^{i\omega t}, \dots, X_{12} e^{i\omega t}$ とする。ただし $X_3 e^{i\omega t}, X_5 e^{i\omega t}, X_6 e^{i\omega t}, X_9 e^{i\omega t}, X_{11} e^{i\omega t}$ および $X_{12} e^{i\omega t}$ は回転角である。これらの力と変位の間には, (2-6) 式に相当するつぎの式がえられる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \dots & \alpha_{1,12} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \dots & \alpha_{2,12} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \alpha_{12,1} & \alpha_{12,2} & \dots & \alpha_{12,12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad (2-7)$$

この (2-7) 式における α_{ij} は, はりの運動方程式を解くことによって求まる。運動方程式をたてるために, 図 2-2 (b) に示すようにはりの軸方向を x , これに垂直方向に $v(x, t)$ をとると, はりの曲げ振動の運動方程式は次式となる。

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{E I g}{\rho A} \cdot \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = 0 \quad (2-8)$$

ここに E は材料の縦弾性係数, I は断面 2 次モーメント, g は重力加速度, ρ は材料の密度, A ははりの断面積を表わす。いま $x = l$ の位置に $F_7 e^{i\omega t}$ が作用していて, 両端ともに自由な場合の境界条件を考えると, それはつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x = \ell : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = -\frac{F_7}{EI} e^{i\omega t} \\ x = 0 : \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2-9)$$

(2-8)式と(2-9)式よりリセプタンス $\alpha_{7,7}$ はつぎのようになる。

$$\alpha_{7,7} = \frac{X_7}{F_7} = \frac{\sin \lambda \ell \cdot \cosh \lambda \ell - \cos \lambda \ell \cdot \sinh \lambda \ell}{EI \lambda^3 (\cos \lambda \ell \cdot \cosh \lambda \ell - 1)} \quad (2-10)$$

ここで $\lambda^4 = \omega^2 A \rho / EI g$

種々の曲げ変位に関する他のリセプタンスも同様に求まる。一方はりのねじり振動の運動方程式はつぎのように表わせる。

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} - \frac{G I_p g}{\rho J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad (2-11)$$

ここに G は材料の横弾性係数, I_p は梁断面のねじり剛さ(有効極2次モーメント), J は極慣性モーメント, $\theta(x, t)$ は回転角である。いま $x = \ell$ に $F_{11} e^{i\omega t}$ なるねじりモーメントが作用し, 両端とも自由な場合の境界条件を考えるとつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} x = 0 : \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ x = \ell : \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{F_{11}}{G I_p} e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (2-12)$$

(2-11)式と(2-12)式よりリセプタンス $\alpha_{11,11}$ はつぎのように求まる。

$$\alpha_{11,11} = \frac{X_{11}}{F_{11}} = -\frac{\cos \lambda \ell}{G I_p \lambda \sin \lambda \ell} \quad (2-13)$$

ここで $\lambda = \omega / a$, $a^2 = G I_p g / \rho J$

他のねじりに関するリセプタンスも同様に求まる。

また、たて振動のリセプタンスは

$$\alpha_{2,2} = \frac{X_2}{F_2} = \frac{\cos \lambda l}{AE \lambda \sin \lambda l} \quad (2-14)$$

$$\lambda = \omega \sqrt{\frac{\rho}{Eg}}$$

のように求まる。

このようにして(2-7)式の α_{ij} が定まる。サブシステムが一様断面のほりに限らず、他の単純部材に対しても α_{ij} に相当するものを定める。また α_{ij} が実験値であってもよい。

このようにして各サブシステムのリセプタンスが求まれば、つぎの段階としてリセプタンスの合成を行う。つまり隣り合ったサブシステムとの結合条件を用いて、各サブシステムのリセプタンスからもとのシステムのリセプタンスを求める。つぎの2つの結合部の状態を考える。

(a) 剛 結 合

結合部において、結合されるサブシステム間に相対的な変位あるいは回転がない場合の結合で、変位の拘束条件と力の拘束条件が与えられる。図2-2(c)においてサブシステムAとサブシステムBが結合される場合、サブシステムAの一つの座標 x_m と、同方向のサブシステムBの座標 x_n における変位は結合すると同じものであるから、変位の拘束条件は次式となる。

$$X_m = X_n \quad (2-15)$$

また力の拘束条件は、外力が作用しないとすれば、

$$F_m + F_n = 0 \quad (2-16)$$

(b) 柔 結 合

結合部において結合されるサブシステム間に相対的な変位あるいは回転がある場合で、これらのサブシステムは、ばねとダンパで結合されていると考える。すなわち、一つの座標方向にばね定数 a と減衰係数 b を考える。力の拘束条件は(2-16)式となる。相対変位を $x = Xe^{i\omega t}$ とおくと下記の(2-17)式となり、相対速度は(2-18)式となる。これより(2-19)式がえられる。

$$X = X_n - X_m = (X_n - X_m) e^{i\omega t} \quad (2-17)$$

$$\dot{X} = \dot{X}_n - \dot{X}_m = i\omega (X_n - X_m) e^{i\omega t} \quad (2-18)$$

$$F_m = a(X_n - X_m) + i\omega b(X_n - X_m) \quad (2-19)$$

$$= (a + i\omega b)(X_n - X_m)$$

このように、剛結合でも柔結合でも一つの座標方向について2個の結合条件式をえる。

一つの振動数において(2-7)式に相当する各サブシステムのリセプタンスを求め、それを結合条件式をもちいて合成する。

2.2.3 計算の原理と方法

次に、そのリセプタンスの合成を行う計算の原理について述べる。今、図2-3に示すように機械システムAがN個のサブシステム(サブシステム1, サブシステム2, ……、サブシステムN)によって構成されているとする。サブシステム上の結合端と外力が加わる点、およびそれ以外にも点を取り、全部でp個(サブシステム1では p_1 個)の点をもうける。3次元システムでは、通常1つの点につき6つの座標方向をもつ。順番に座標番号をつけ、サブシステム1からサブシステムNまで通し番号をつける。

たとえばサブシステム1が図2-4に示すようなもので、いま F'_1 が外力、 F'_2 が結合端の力であり変位としてはそれらの点の変位 X'_1 、 X'_2 のほかには別な点 X'_3 、…… X'_{p_1} も知りたいものとする、この力と各点の変位の間には

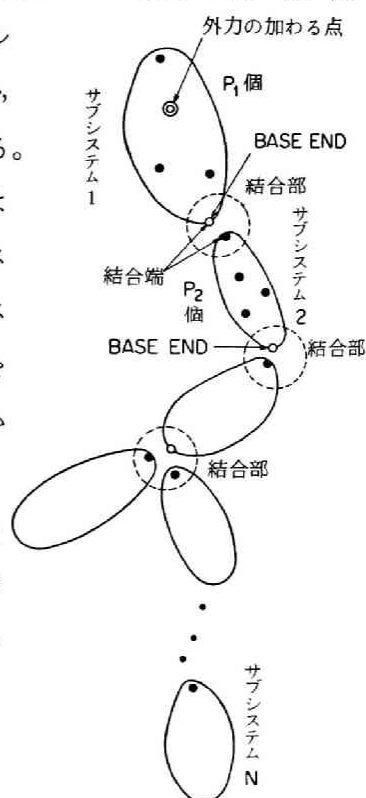


図2-3 サブシステムの合成の図

$$\left. \begin{aligned} X'_1 &= a_{1,1} F'_1 + a_{1,2} F'_2 \\ X'_2 &= a_{2,1} F'_1 + a_{2,2} F'_2 \\ &\vdots \\ X'_{p_1} &= a_{p_1,1} F'_1 + a_{p_1,2} F'_2 \end{aligned} \right\} \quad (2-20)$$

の関係が成り立つ。

(2-20) 式の P_1 個の式を行列表示すると

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_{p_1} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \end{Bmatrix} \quad (2-21)$$

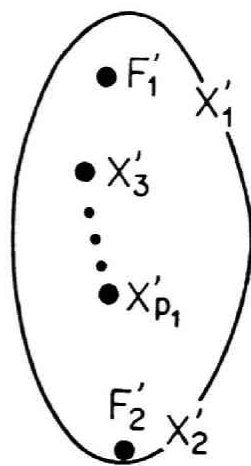


図 2-4 サブシステム 1 の説明図

同様にサブシステム 2, 3, ..., N についても

$$\begin{Bmatrix} X'_{p_1+1} \\ X'_{p_1+2} \\ \vdots \\ X'_{p_1+p_2} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F'_3 \\ F'_4 \end{Bmatrix} \quad (2-22)$$

$$\begin{Bmatrix} X'_{p-p_n+1} \\ \vdots \\ X'_p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \\ & \\ & \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F'_{k-1} \\ F'_k \end{Bmatrix} \quad (2-23)$$

のように行列を定めておく。その係数行列 (リセプタンス行列) (RM_1) , (RM_2) ,

(RM_3) , ..., (RM_N) をまとめて一つの行列に表わせれば次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \\ \vdots \\ X'_{p_1} \\ X'_{p_1+1} \\ \vdots \\ X'_{p_1+p_2} \\ \vdots \\ X'_p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{RM_1} & & \\ & \boxed{RM_2} & \\ & & \boxed{RM_N} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F'_1 \\ F'_2 \\ \vdots \\ F'_k \end{Bmatrix} \quad (2-24)$$

ここに通し番号をつけられた変位座標ベクトル X_1, X_2, \dots および力の座標ベクトル F_1, F_2, \dots が現われているが、以後の説明においては便宜上これらを次の表 2-1 のように場合に応じて種類分けして総称することにする。

表 2-1 座標記号の説明

合成における変位の全座標系を総称して	X_1
結合部および外力のかかる点の変位と力の座標系を総称して	X_2, F_2
結合部の BASE END (各結合部でサブシステム番号の一番若い端) の変位と力の座標系を総称して	X_3, F_3
結合部の BASE END 以外の変位と力の座標系を総称して	X_4, F_4
外力の加わる点の変位と力の座標系を総称して	X_5, F_5

このように種類分けして総称するベクトルをもって最後の式を表わせれば次の (2-25) 式のようにになる。

$$\left\{ X_1 \right\} = \left[\begin{array}{c} \boxed{RM_1} \\ \boxed{RM_2} \\ \vdots \\ \boxed{RM_N} \end{array} \right] \left\{ F_2 \right\} \quad (2-25)$$

また、結合部の座標の間には、

結合部の変位の座標系の関係

$$\left[DM \right] \left\{ x_1 \right\} = 0 \quad (2-26)$$

結合部の力の座標系の関係

$$\left[FM \right] \left\{ \begin{array}{c} F_3 \\ F_4 \end{array} \right\} = 0 \quad (2-27)$$

結合部のばねとダンパーの関係

$$\begin{Bmatrix} QM \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_4 \end{Bmatrix} \quad (2-28)$$

このようにして表わされる境界条件式が成り立つ。

剛体結合のときは(2-26)式に(2-25)式を代入し、また結合部にバネとダンパーを含む柔結合のときは(2-28)式に(2-25)式を代入することによって

$$\begin{Bmatrix} QDM \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-29)$$

のように x_1 を消去した式を得る。

(2-27)式を結合部の BASE END の力の座標と結合部の他の力の座標の関係に変形し、

$$\begin{Bmatrix} F_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} FMQ \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_4 \end{Bmatrix} \quad (2-30)$$

さらに(2-30)式を(2-29)式に代入し変形すると、

$$\begin{Bmatrix} QMN \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} QMF \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_5 \end{Bmatrix} \quad (2-31)$$

これより

$$\begin{Bmatrix} F_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} QMN \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} QMF \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_5 \end{Bmatrix} \quad (2-32)$$

(2-32)式および(2-30)式を(2-25)式に代入して整理すると

$$\begin{Bmatrix} x_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} RC_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_5 \end{Bmatrix} \xrightarrow{\text{外力のかかる点および次のサブシステムとの合成に必要な結合部の力の座標}} \quad (2-33)$$

以上で N 個のサブシステムを合成したシステム A のリセプタンスが $[RC_1]$ 行列として得られたわけである。もしシステム A がさらに他のサブシステムと結合されているときには、 $[RC_1]$ 行列を 1 つのサブシステムのリセプタンスとし、新たにべつなサブシステムの行列 (複数であってもよい) $[RM_i]$ と合成

することをくりかえす。

これにより X_1 の座標数は順次大きくなり最終システムの全変位の座標と外力の座標の間のリセプタンスが次式のように計算される。

$$\{x_1\} = \begin{bmatrix} RM \end{bmatrix} \{F_s\} \quad (2-34)$$

以上が計算の基本的な流れである。

これよりまず、システムの周波数特性および共振振動数を求めるときは、(2-21)(2-22)(2-23)式等における変位の座標は、外力のかかる点および結合端のみをとれば十分である。するとこのときには(2-24)式、(2-25)式の係数行列は対称行列となり、必要な記憶容量を減らすことができる。以下同じ手順の計算を行い(2-33)式の左辺 X_1 は外力のかかる点および次のサブシステムとの合成に必要な結合部の力の座標のものだけをのこす。これにより(2-33)式の係数行列も対称行列となる。その後同様にして(2-34)式をえることができる。このようにして、合成されたシステムの加振点と変位測定点の間のリセプタンスを計算する。この計算を所要の振動数範囲内で多数の異なる振動数について行い、周波数特性をうることができる。共振点付近ではさらに細かく振動数を取り共振振動数を求めることができる。また十分に低い振動数に対するリセプタンスにより静コンプライアンスを求めることができる。

このようにして共振振動数が求められたならば、次はそれらの共振状態における振動姿態を求めるためのモード形計算を行う。モード形計算はいくつかの共振振動数についてのみ行えばよく、非常に多くの振動数については行わないが、そのかわりにシステム上のできるだけ多くの点について、その変位を求めることが必要である。(2-34)式の X_1 によりサブシステムの結合端での全座標の変位が計算されモード形が求まるが、そのサブシステムの結合端以外のサブシステム内での変位を求める場合およびエネルギー分布を計算する場合は次の処理を行う。

各サブシステムのリセプタンスマトリックスを示す(2-21), (2-22), (2-23)式または(2-7)式に単位マトリックスをつけ加える。たとえば(2-7)式では次の(2-35)式とする。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_{12} \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} & & & & \\ & \alpha & & & \\ & & & & \\ 1 & & & & \\ & 1 & & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{12} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots (2-35)$$

こうすることにより合成計算の結果として、各結合端における振動内部力を求めることができる。そこですべての合成計算がすんでから、各サブシステムの結合端の振動内部力を(2-7)式に代入することによりその結合端の変位を求めることができ、同様にそのサブシステムの任意の分割点の変位も求められる。

次に各共振振動数におけるシステム全体のエネルギー分布を求める。いま、はり要素のエネルギー分布として、曲げ変形によるもの、縦変形によるもの、およびねじり変形による慣性エネルギーと復元エネルギーを考える。これらはいずれも、サブシステムのリセプタンスを最初に計算する基礎となった偏微分方程式に基づいて計算することができる。一例としてねじり振動について説明すると、その運動方程式はさきに(2-11)式に示したとおりである。これよりある振動数 ω におけるねじりの慣性エネルギー T と復元エネルギー V の最大値は、それぞれ次式で与えられる。

$$T = \frac{1}{2} \rho J \omega^2 \int_0^l \theta^2 dx \quad (2-36)$$

$$V = \frac{1}{2} G I_p \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx \quad (2-37)$$

(2-11)式に基づいて計算した θ および $(\partial \theta / \partial x)$ を代入すれば、(2-36)式および(2-37)式は次のようになる。

$$T = \frac{\rho J \omega^2}{2 (G I p \lambda \sin \lambda \ell)^2} \left\{ (F_5^2 + F_{11}^2) \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\sin 2 \lambda \ell}{4 \lambda} \right) + 2 F_5 F_{11} \left(\frac{\ell \cos \lambda \ell}{2} + \frac{\cos \lambda \ell \sin 2 \lambda \ell}{4 \lambda} + \frac{\sin^3 \lambda \ell}{2 \lambda} \right) \right\} \quad (2-38)$$

$$V = \frac{1}{2 G I p \sin^2 \lambda \ell} \left\{ (F_5^2 + F_{11}^2) \left(\frac{\ell}{2} - \frac{\sin 2 \lambda \ell}{4 \lambda} \right) + 2 F_5 F_{11} \left(\frac{\ell \cos \lambda \ell}{2} - \frac{\cos \lambda \ell \sin 2 \lambda \ell}{4 \lambda} - \frac{\sin^3 \lambda \ell}{2 \lambda} \right) \right\} \quad (2-39)$$

ここに F_5 および F_{11} は、図 2-2(b) にみるようなはりのそれぞれ右および左端に加わる振動内部力であり、上述のモード形計算のときに求まる各サブシステムの振動力の値を (2-38) および (2-39) に代入することによって、そのサブシステムの最大慣性および復元エネルギーが計算できる。はりの曲げおよび縦振動によるエネルギー、そしてばねおよび集中質量要素のエネルギーも同様に各サブシステムの端に生ずる振動内部力より計算される。また、それらのエネルギー分布は、各はり要素において曲げ変形、縦変形およびねじり変形によるものとして別々に出力され、そのサブシステムがどのような動的な変形をしているかを知ることができる。さらに結合部のばね要素における復元エネルギー、集中質量要素の慣性エネルギーも同様に振動内部力より計算する。そこで、ある m 次の共振状態でサブシステムに貯えられる最大慣性エネルギーを T_{Sm} 、最大復元エネルギーを V_{Sm} とすると、システム全体の N 個のサブシステムに貯えられる最大慣性エネルギー T_{Am} および最大復元エネルギー V_{Am} は

$$T_{Am} = \sum_{s=1}^N T_{Sm} \quad (2-40)$$

$$V_{Am} = \sum_{s=1}^N V_{Sm} \quad (2-41)$$

として求まる。

次に、この各共振振動数におけるエネルギー値をもちいて、そのモードでのモードフレキシビリティ f_m は、次の式で計算される。

$$f_m = \frac{X_{em} X_{cm}}{2 V_{Am}} \quad (2-42)$$

ここで X_{em} および X_{cm} はこのエネルギー分布状態における問題とする点の変位（工作機械では、切削点での工具 A と品物 B の間の相対変位）の大きさである。

このリセプタンス合成法電子計算機プログラムシステムによる解析の大きなフローチャートを図 2-5 に示す。これにより入力データをかえるだけで種々の構造物の動特性を計算することができる。このプログラムシステムのマニュアルは日本機械学会研究協力部会「工作機械の剛性および切削性能の向上に関する研究分科会」研究成果報告書「工作機械の動的構造解析プログラム・マニュアル集²⁻⁸⁾」に記載している。

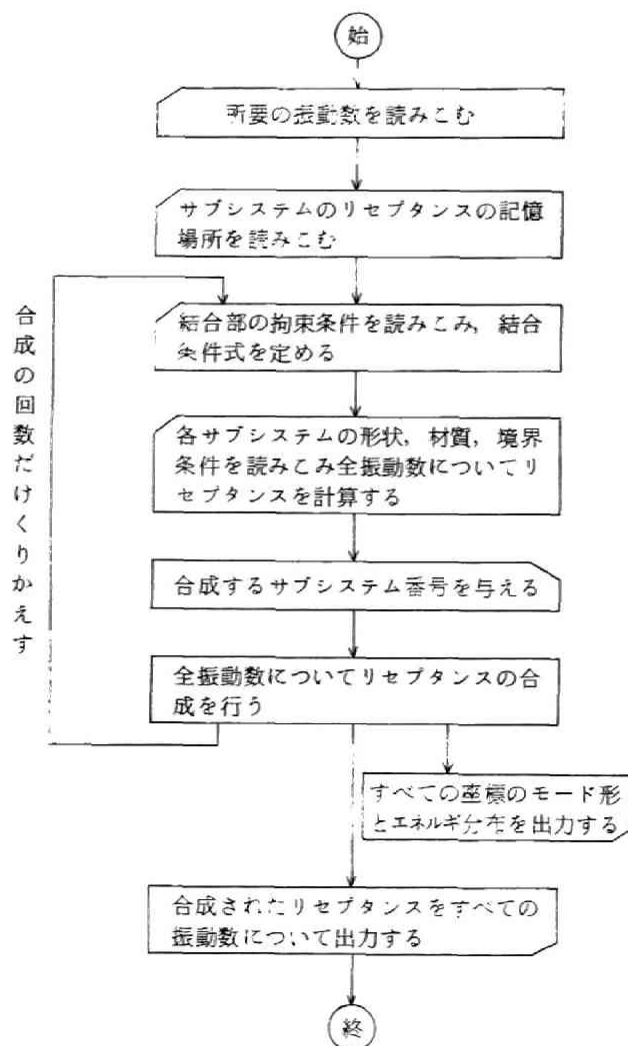


図 2-5 一般的な場合の大きなメインプログラムのフローチャート

2.2.4 適用例

リセプタンス合成法プログラムシステムを用いて計算を行った例を、単純なものより順に述べる。

(1) 2次元振動モデル

図2-6の2次元曲げ振動モデルを考える。これは直径19 mmの鋼棒で長さ180 mm, 400 mm, 700 mmの五つの部材を一平面内で直角に剛結合したy軸に対称な構造である。A, B 2点における振動力と振動変位の関係を求めるために合成した最終結果は(2-43)式の形に求まる。

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_{28} \\ X_{29} \\ X_{30} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \alpha_{1,28} & \alpha_{1,29} & \alpha_{1,30} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \alpha_{2,3} & \alpha_{2,28} & \alpha_{2,29} & \alpha_{2,30} \\ \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} & \alpha_{3,3} & \alpha_{3,28} & \alpha_{3,29} & \alpha_{3,30} \\ \alpha_{28,1} & \alpha_{28,2} & \alpha_{28,3} & \alpha_{28,28} & \alpha_{28,29} & \alpha_{28,30} \\ \alpha_{29,1} & \alpha_{29,2} & \alpha_{29,3} & \alpha_{29,28} & \alpha_{29,29} & \alpha_{29,30} \\ \alpha_{30,1} & \alpha_{30,2} & \alpha_{30,3} & \alpha_{30,28} & \alpha_{30,29} & \alpha_{30,30} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_{28} \\ F_{29} \\ F_{30} \end{Bmatrix} \quad (2-43)$$

この構造物を空間中にフリーフリーの状態にして、B点をx方向あるいはy方向から加振し、それぞれの方向の変位を測定する場合の周波数応答を500 Hz まで計算した理論値は図2-7(a)に示すごとくで、x-y平面内の固有振

動数は24.2 Hz, 48.3 Hz, 126.4 Hz, 210.3 Hz, 242 Hz, 406 Hz および486 Hzと求まった。図中円内に1次と2次の共振状態におけるモード図形を示すが、細線は各点a, b, c, …の振動による軌跡を示し、その方向をモードの方向という。各点a, b, c, …を中心として点a', b', c', …と点a'', b'', c'', …の直線間を正弦運動する。このシステムを工作機械構造に対応させると

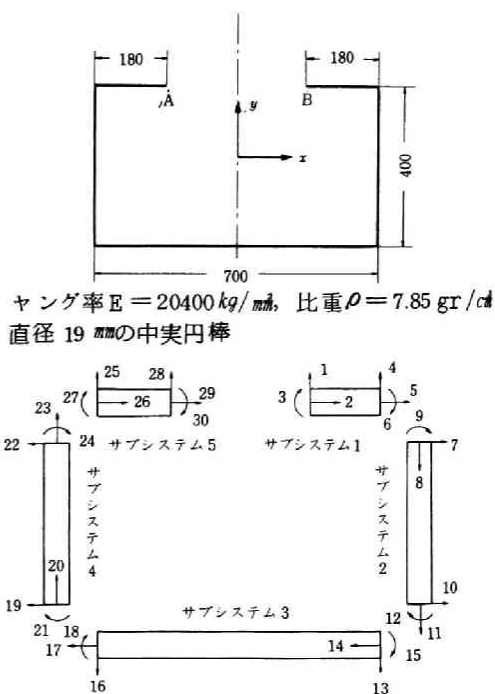
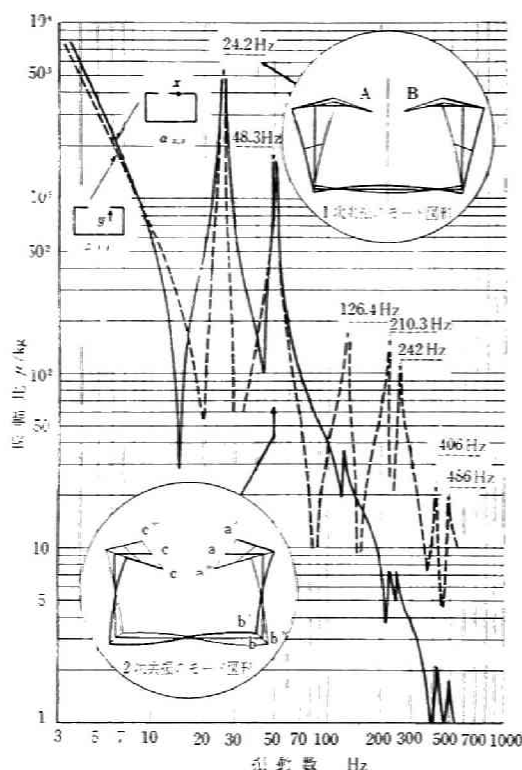
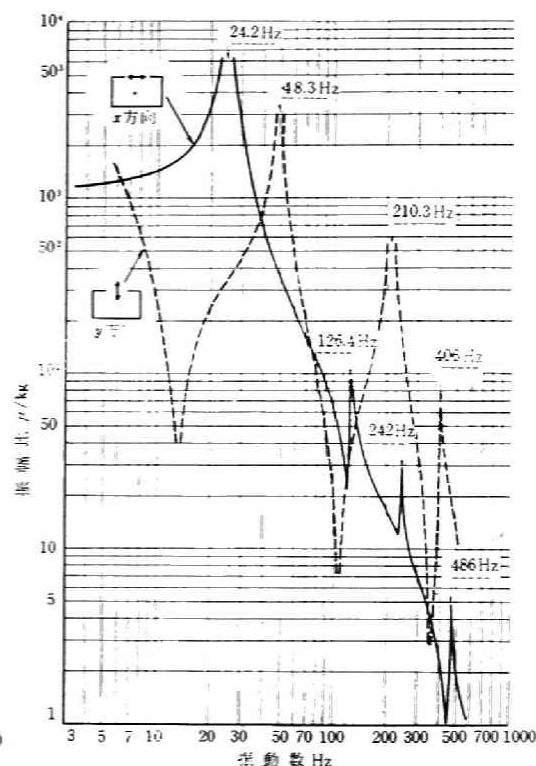


図2-6 2次元曲げ振動モデル



(a) リセプタンス $a_{x,x}$ と $a_{y,y}$ の周波数応答



(b) 2点A, B間のx方向およびy方向の相対リセプタンス

図2-7 2次元曲げ振動モデル(図2-6に示す)の周波数応答の理論値

A B間が工作物と工具との接触部に相当する。工作精度に影響するのは工作物と工具との相対変位であるから、A B間に相反する切削力が作用しそれが振動した場合のA B間の相対変位を求めることが必要である。図2-7(b)がこのように相対リセプタンスとして計算した周波数応答である。実線はA B間をx方向に加振した場合のx方向の相対変位を計算したもので、破線はy方向に加振した場合のy方向の相対変位である。このような対称構造物では、モード図形よりわかるように、奇数次の共振状態ではy軸に関して対称に振動し、偶数次の共振状態では反対称に振動する。奇数次には、各瞬間においてA B間のy方向の相対変位は0であり、この共振振動数ではy方向に加振しても共振しない。

偶数次の共振状態では、逆に x 方向に加振した場合に共振しない。

このような理論値が実際構造の実験値と一致するかどうかを調べるために、図 2-6 の構造物の A 点を固定し、B 点を x 方向に加振し、 x 方向の変位を求めた場合の振動数特性の実験結果を理論値と比較して図 2-8 に示す。共振振動数、振幅比が極小になる反共振振動数はよく一致している。

図 2-9 は、長さ 2000 mm の一様断面の片持ちの部材を a と b の長さを順次かえて 2 分し、直角に剛結合した構造について計算を行ない、5 次までの曲げ振動の共振振動数を比較したものである。1 次の共振振動数は、 $a = b = 1000$ mm のときがもっとも高く、それより a が増加または減少するにつれて

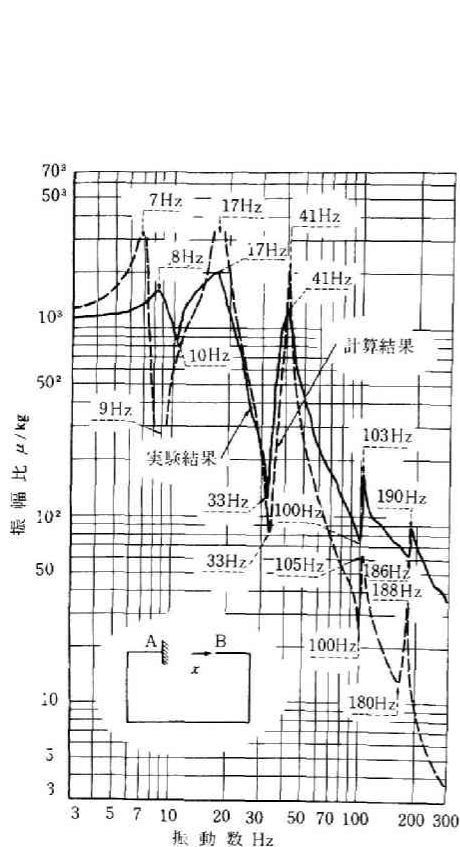
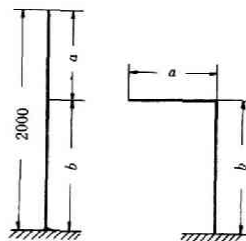


図 2-8 2 次元曲げ振動モデル(図 2-6 で A 端を固定)の周波数応答 (B 点のレセプタンス $\alpha_{x,x}$)



a mm	0	200	400	600	800	1000	1200	1400	1600	1800
b mm	2000	1800	1600	1400	1200	1000	800	600	400	200
共振振動数 Hz	7.2	7.8	8.5	8.9	9.5	10.1	9.5	9.0	8.2	7.8
	47.8	50.2	51	41	31.5	27.5	29	35.5	48.1	50.4
	133	141	113	104	124	136	108	89	79	128
	264	265	218	253	243	198	253	236	192	185
	435	410	398	413	363	425	353	430	378	315

縦弾性係数 $E = 20400 \text{ kg/mm}^2$

横弾性係数 $G = 8200 \text{ kg/mm}^2$

密度 $\rho = 7.85 \text{ gr/cm}^3$, 内径 26.2 mm

外径 34.0 mm の円管

図 2-9 2 次元曲げモデルの共振振動数

低くなる。2次の共振振動数は、 $a = b = 1000 \text{ mm}$ のときが逆にもっとも低くなっている。図2-10に $a = b = 1000 \text{ mm}$ の場合の1次から4次までの共振状態のモード図形を示す。すべての部材が一樣で同じ断面をもち、平面内にそれぞれの端を他の部材の端と剛結合して、一つのシステムをつくっているとし、それをシステム1とする。それと相似で部材の長さ方向のスケールが $\lambda = l_1 / l_2$ である断面の形状、

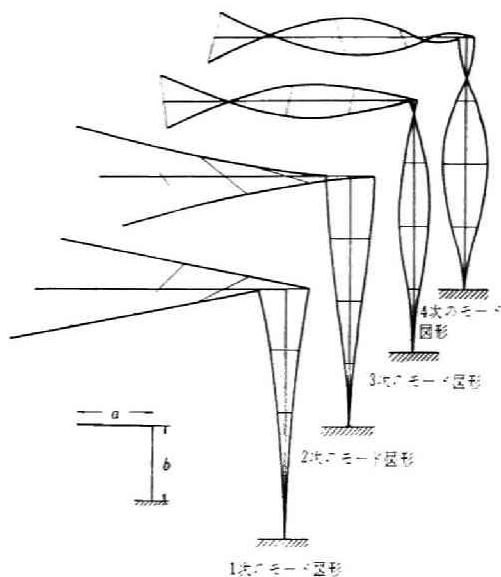


図2-10 $a:b=1$ (断面は一樣)の場合の曲げ振動のモード図形

材質および密度が異なる一樣断面のシステムをシステム2とする。そのときシステム1およびシステム2のこの平面内の共振振動数それぞれ f_1 および f_2 の間には、つぎの関係がなりたつ。

$$\frac{f_1}{f_2} = \sqrt{\frac{A_2}{A_1}} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \sqrt{\frac{I_1}{I_2}} \frac{1}{\lambda^2} \quad (2-44)$$

ここで、添数字1はシステム1、添数字2はシステム2を示し、 A 、 ρ 、 E 、 I は(2-8)式と同じものを表わす。

この(2-44)式の関係によって、2つのシステムの各次の共振振動数の換算ができ、モード図形も相似となる。したがって図2-9の関係は一般の一樣断面の片持ち部材になりたち、2つに分けて直角に剛結合する場合、等長にわける場合が1次の共振振動数をもっとも高く、直線片持ち部材の $10.1 \text{ Hz} / 7.2 \text{ Hz} = 1.4$ 倍である。

図2-11に $a = b = 1000 \text{ mm}$ の同じシステムをZ方向から加振した場合のモード図形を示す。これは曲げ振動とねじり振動を含んだシステムである

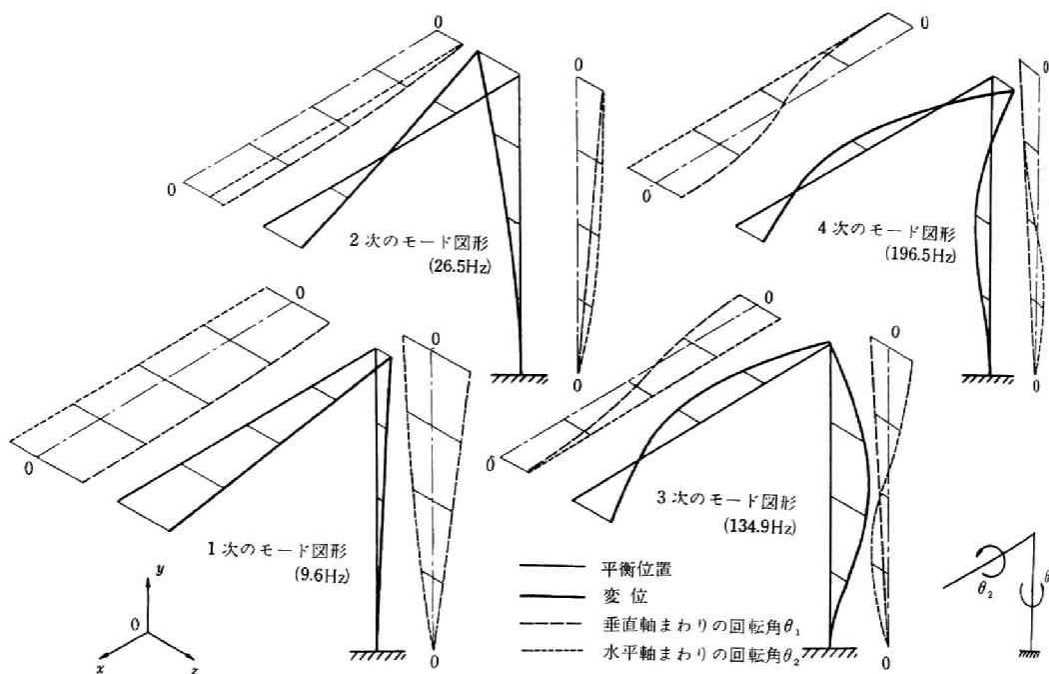


図 2-11 z 方向から加振した場合の曲げとねじりを含む振動システムのモード図形

(2) プラノミラー

図 2-12 に振動特性の計算および実験による測定を行ったプラノミラーの外観図を示す。コンクリート基礎を除く機械の重量が約 30 トン、コンクリート基礎が約 70 トン、そしてコラムの高さが 3400 mm である。実験では、プラノミラーのテーブルの上に加振器を固定し、図 2-12 の A 点を加振し、A 点の変位を測定した。このときの共振曲線を図 2-13 に示す。実線は X 方向に加振し、X 方向の変位を測定した場合のリセプタンス α_{xx} 、破線は同様に Y 方向に加振した場合の Y 方向の変位のリセプタンス α_{yy} を示している。

そこで、設計図により得られる数値を入力データとして、リセプタンス合成法プログラムシステムにより振動特性を計算するために、この機械システムを 13 個の単純な形状をもつサブシステムに分割した。このようすを図 2-14 中

の右下に示している。この図においてサブシステム1からサブシステム12までは分布質量をもつ一様断面のはり要素であり、ミリングヘッドを2つのはり要素のサブシステム1と2に分割した。クロスレールとクロスアームを一体と近似し、これを4つのそれぞれの断面が一樣なはり要素のサブシステム3, 4, 5, 6に分割した。さらにコラムも4つのはり要素のサブシステム7, 8, 9, 10に分割し、ベッドとテーブルとコンクリート基礎を合成はりとして近似しサブシステム11, 12とした。また、コンクリート基礎が弾性をもつ地盤に支えら

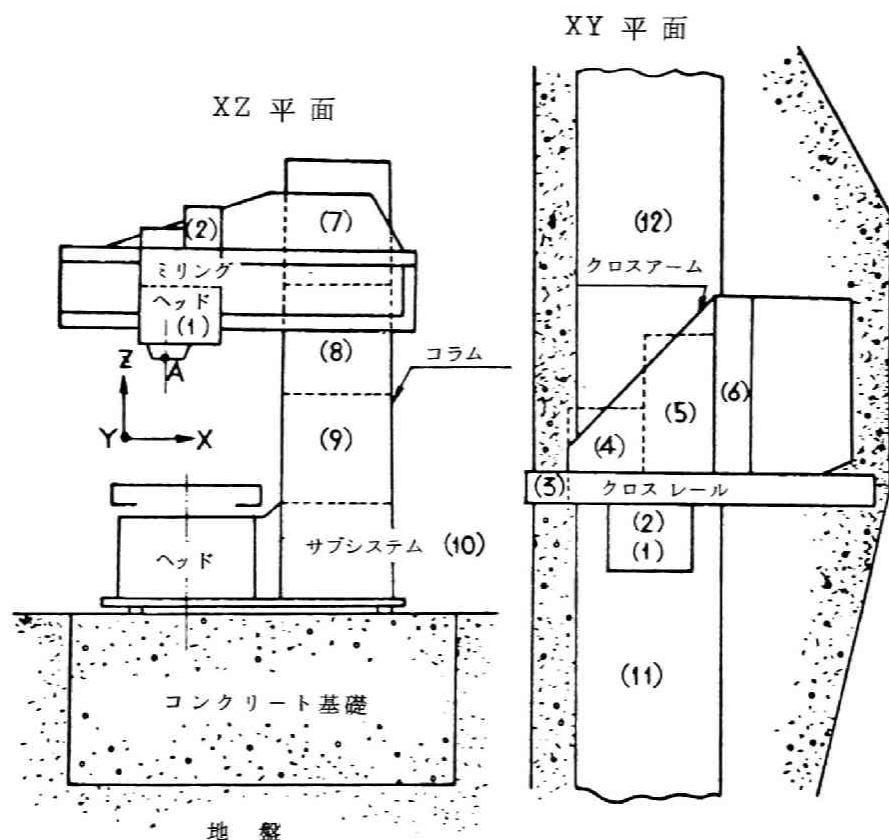


図 2-12 リセプタンス合成法により解析を行ったプランミラーの概観図

れているとみなし、コンクリート基礎の形状と地盤係数によって近似的に計算して、3つの軸方向変位とそれぞれの軸まわりの回転の合計6つの方向の等価なばねに置き換え^{2-9), 2-10), 2-11)}、サブシステム13とした。さらに、テーパー形状をしているクロスアームを近似するため、図2-14に示すようにそれぞれのサブシステムの端が質量のない完全剛体のはりでオフセットして結合さ

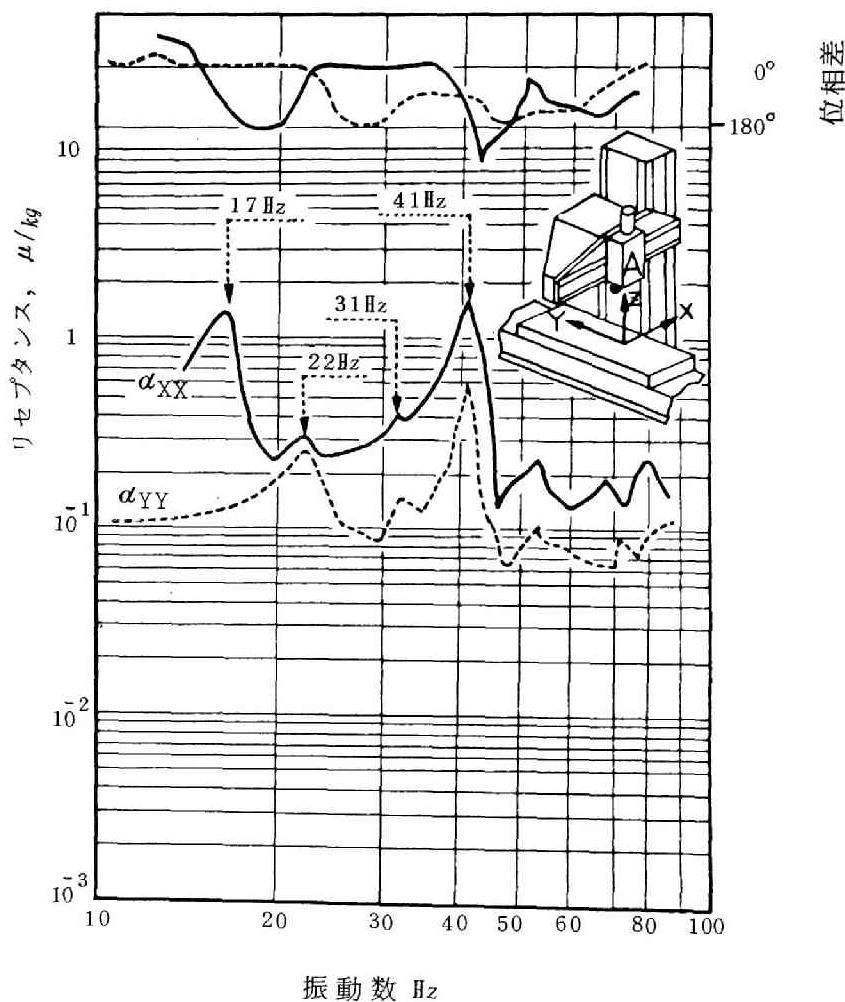


図 2-13 プラノミラーの A 点での直接リセプタンス α_{XX} と α_{YY} の周波数
応答の実験値

れているとし、またミリングヘッドの重心とクロスアーム、サブシステム6とコラムの重心、コラムと基礎がそれぞれ質量のない完全剛体のはりで結合されているとして細線で表わしている。

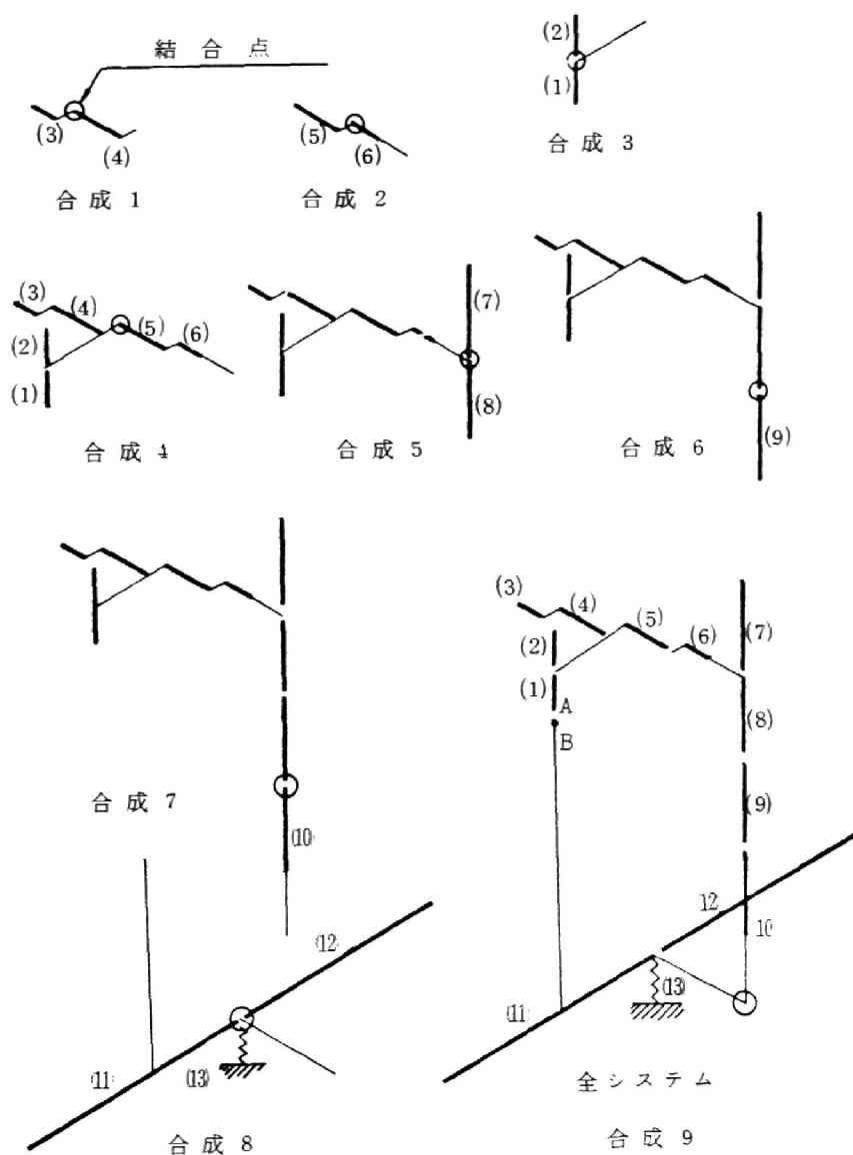


図 2-14 プラノミラーの動特性計算のための合成の手順
(細線は無質量完全剛体はり、サブシステム13はばね)
(に等価なばねを表す。)

そこで、この図 2-14 に示す合成 1 から合成 9 までの合計 9 回の合成を行えば、個々のサブシステムのリセプタンスからシステム全体のリセプタンスが得られる。また、切削点での A B 間の相対リセプタンスを計算するために、テーブルより B 点まで無質量完全剛体はりをのぼした。

図 2-15 は、切削点 A B 間の X および Y 軸方向の相対加振力に対する同一方向の相対変位に関する相対リ

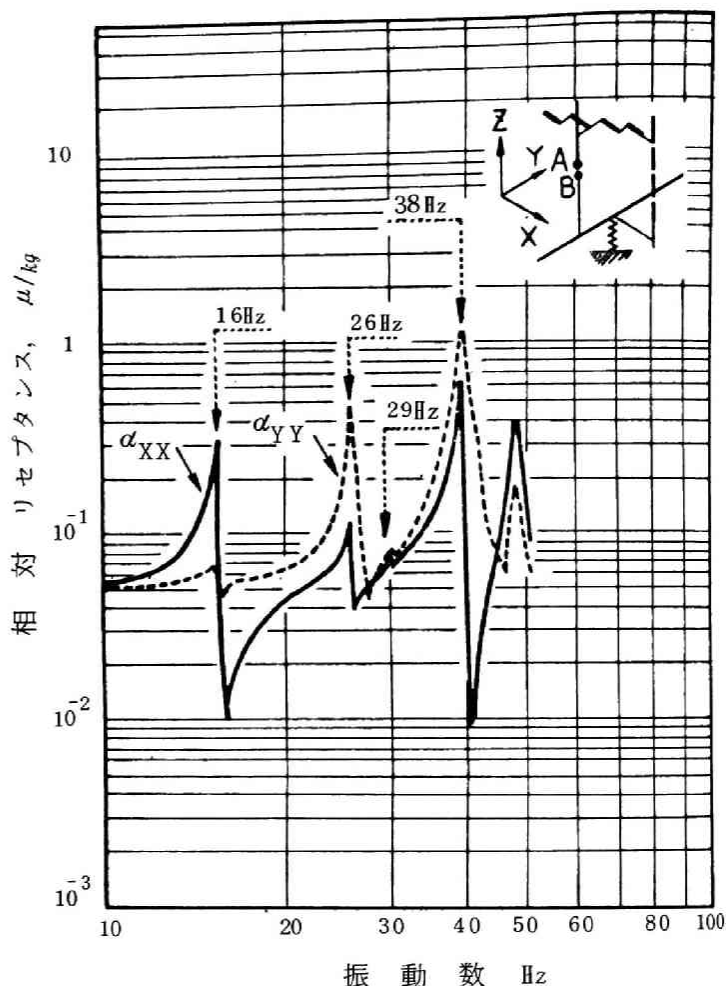


図 2-15 プラノミラーの A B 間の相対リセプタンス α_{XX} と α_{YY} の周波数応答の計算値

セプタンスの周波数応答の計算結果を示している。この図より、4 次モードまでの共振振動数は、16 Hz, 26 Hz, 29 Hz, 38 Hz であり、図 2-13 の実験値 17 Hz, 22 Hz, 31 Hz, 41 Hz と対応している。さらに図 2-16 はこれらの固有モードのうちの 1 次と 4 次の固有モードのモード形の実験値と計算値を示している。他のモード次数のモード形も実験値と計算値とは対応がとれ

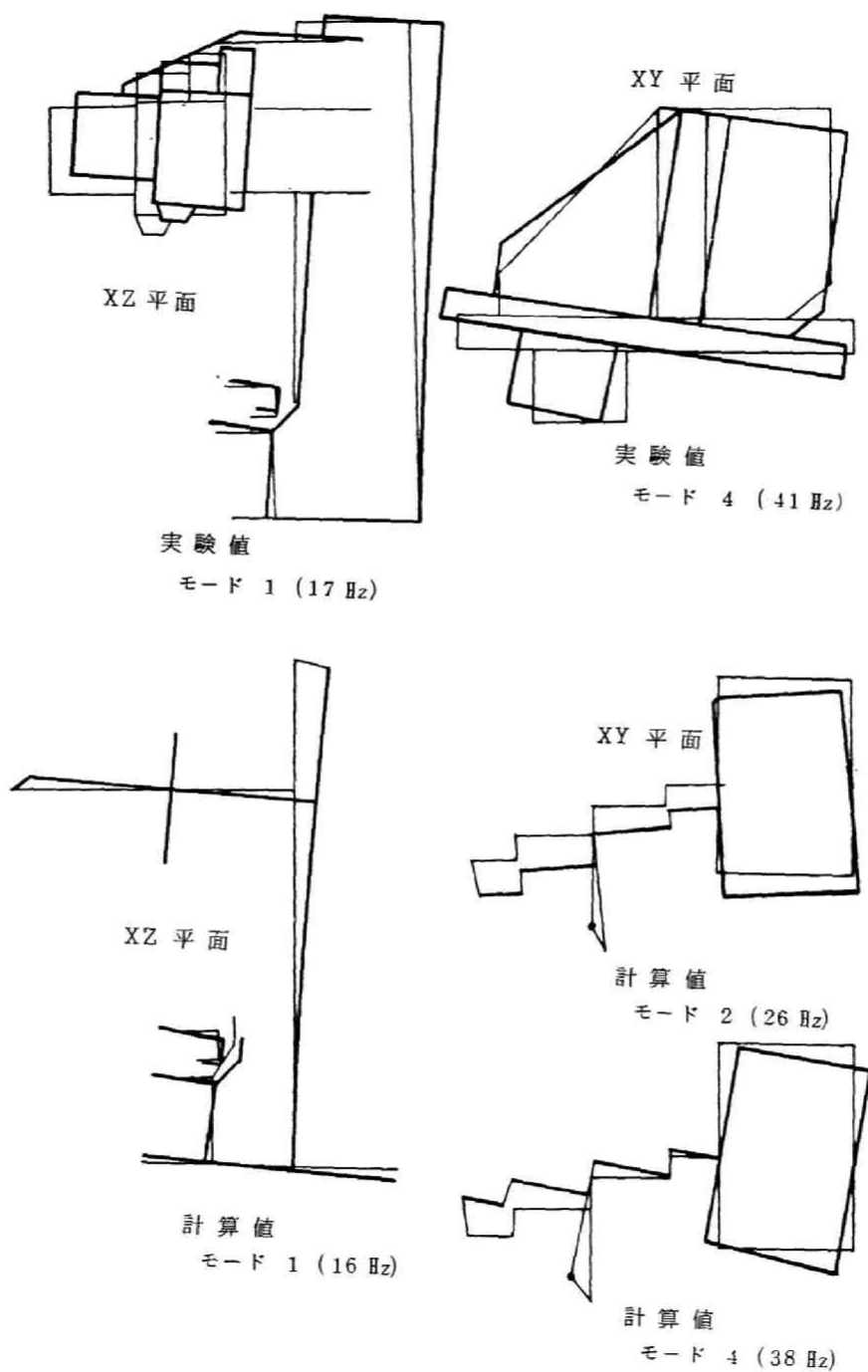


図2-16 プラノミラーのモード形の実験値と計算値

ており、共振振動数およびそのモード形から計算値と実験値はよく一致している。

次に、リセプタンス合成法プログラムシステムを用いて、このプラノミラーの各固有モードにおける切削点でのモーダルフレキシビリティおよび構造全体のエネルギー分布を計算する。これにより、プラノミラーの振動特性上の性能の評価を行うことができる。この計算結果を表 2-2 の左側に示している。これより切削点での相対リセプタンスに関して最も大きなモーダルフレキシビリティをもつ固有モードは 4 次の固有モードで、その座標方向は Y 軸方向である。そのモーダルフレキシビリティの値は $2.82 \times 10^{-2} \mu/kg$ であり、その座標方向の静コンプライアンス $4.78 \times 10^{-2} \mu/kg$ との比をとると $2.82 \times 10^{-2} / 4.78 \times 10^{-2} = 0.590$ となる。したがって 4 次の固有モードの Y 軸方向のモーダルフレキシビリティは静コンプライアンスの 59% を占め、この固有モードの特性の改善が必要ながことがわかる。また、4 次の固有モードの次に高いモーダルフレキシビリティをもつ 1 次および 2 次の固有モードにおいては、エネルギー分布をみるとわかるように地盤に復元エネルギーの 8 割程度が貯えられており、地盤の高減衰能を考慮すると、現実のこれらの固有モードのリセプタンスは十分に小さいことが予想される。この表 2-2 において、モード 3 ではモーダルフレキシビリティが他の固有モードに比して十分に小さいため、問題となりうる固有モードでないと考え、エネルギー分布の比率を省略している。そこで問題となる 4 次の固有モードにおいて、そのエネルギー分布を見ると、コラム部に曲げおよびねじりの復元エネルギーが大きく分布していることがわかる。そのコラム部での曲げおよびねじりの復元エネルギー分布のようすを図 2-17 に示している。結局このプラノミラーにおいて、振動特性上コラム部の剛性が低いことが判定できたわけであるが、表 2-2 の右側に、このコラムのねじり剛性だけを 50% 増加した場合の 4 次モードの特性の変化を示している。これよりエネルギー分布の変化と Y 軸方向のモーダルフレキシビリティの低下を示している。このようにして設計変更を続ければ、十分な特性の改善がなされるものと予想で

表2-2 プラミラーの原設計および改造設計の各固有モードのモーダルフレキシビリティとエネルギー分布

項 目	静 的 コンプライアンス	原 設 計				改 造 設 計		
		モード1 16 Hz	モード2 26 Hz	モード3 29 Hz	モード4 38 Hz	静 的 コンプライアンス	モード4 42 Hz	
静的コンプライア ンスとモーダ ルフレキシビ ティ, μ/kg	X方向	4.73×10^{-2}	2.00×10^{-8}	1.06×10^{-8}	1.39×10^{-5}	9.63×10^{-8}	4.04×10^{-2}	1.06×10^{-2}
	Y方向	4.78×10^{-2}	7.87×10^{-5}	3.17×10^{-3}	1.27×10^{-4}	2.82×10^{-2}	3.58×10^{-2}	1.85×10^{-2}
	Z方向	3.35×10^{-2}	6.72×10^{-8}	2.62×10^{-4}	1.65×10^{-5}	1.31×10^{-8}	3.35×10^{-2}	3.45×10^{-8}
慣性エネルギー の分布の比率	ミリングヘッド	0.119	0.0529		0.266	/	0.278	
	クロスアームとクロスレール	0.215	0.0902		0.286		0.320	
	コラム	0.451	0.137		0.0955		0.157	
	ベッドとコンクリート基礎	0.215	0.718		0.343		0.233	
	計	1.0	1.0		1.0		1.0	
復元エネルギー の分布の比率	ミリングヘッド	曲 げ	—	—	—	/	—	
		ね じ り	—	—	—		—	
	クロスアームと クロスレール	曲 げ	—	—	0.00617		0.00603	
		ね じ り	—	—	0.000361		0.00298	
	コ ラ ム	曲 げ	0.164	0.0560	0.198		0.439	
		ね じ り	0.00459	0.0375	0.506		0.360	
	ベ ッ ド と コンクリート基礎	曲 げ	0.0686	0.0780	0.0676		0.0905	
		ね じ り	0.000346	—	—		—	
	地 盤	0.760	0.826	0.213	0.0973			
	計	1.0	1.0	1.0	1.0			

きる。

(3) 立 旋 盤

(i) 計算のためのモデル化

図2-18は、直径1.6mのテーブルをもつ鋼板溶接構造の立旋盤の計算のための数学モデルである。機械の高さは3.48mで、機械の全重量は18,048kgである。そしてこの機械は厚さ0.6mで5m平方のコンクリート基礎の上に据付けられている。このコン

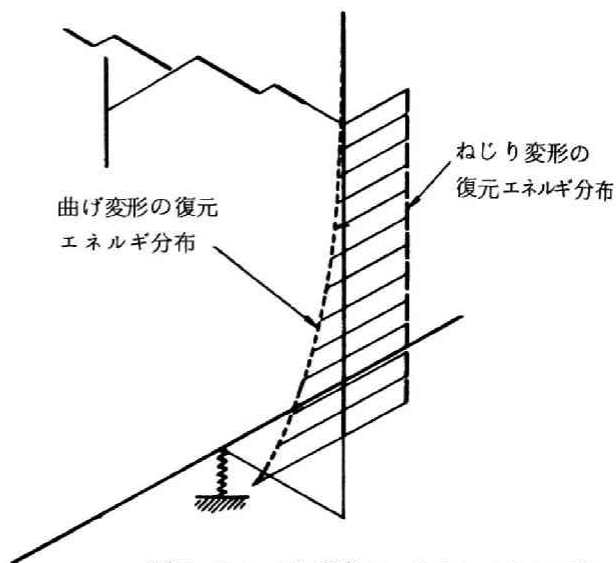


図2-17 4次固有モードでのコラムに貯えられる曲げおよびねじりの復元エネルギーの分布の計算値

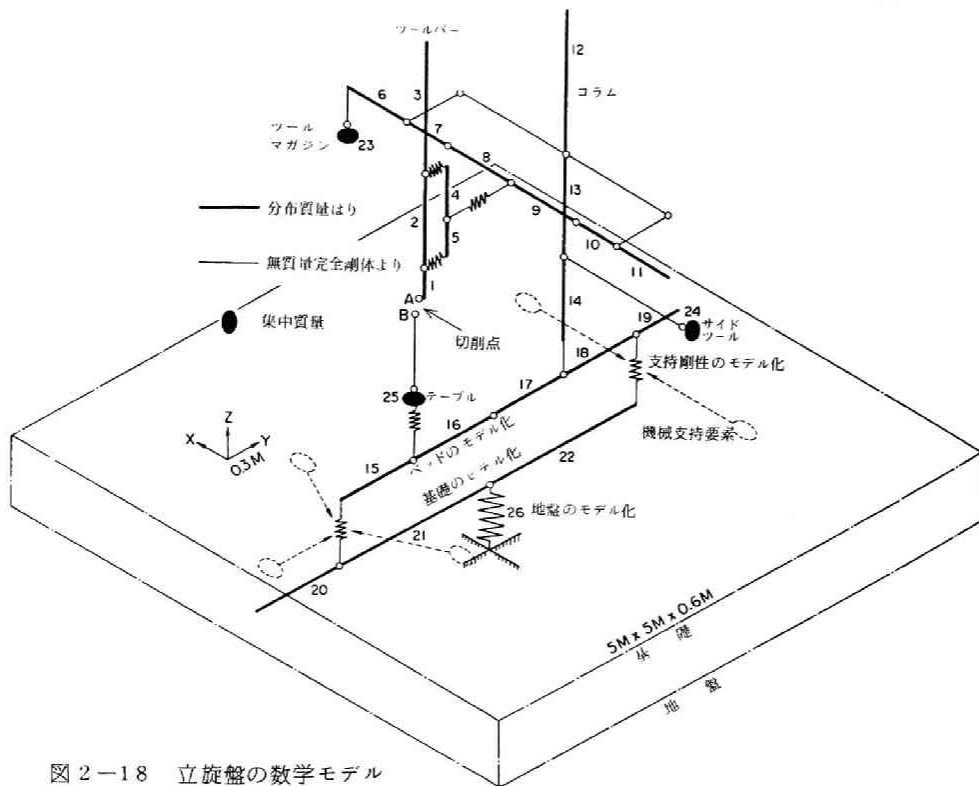


図2-18 立旋盤の数学モデル

クリート基礎の重量は30,000kgである。また、この機械はコンクリート基礎上に配置した5つのレベリングブロックの上に基礎ボルトなしに設置されており、この各レベリングブロックのコンクリート基礎との接触面積は80cm²である。この機械構造の振動特性をリセブタンス合成法を用いて解析するために、図2-18に示すように分布質量はり、集中質量および無質量ばねの多くの要素でモデル化する。この数学モデルは26個の要素で表わされており、また構造の各部材は、表2-3に示すようにモデル化した。また、図2-18の細線は部材の中心軸がオフセットして結合していることを数学モデルに入れるために想定した無質量完全剛体

はりを表わしている。

また、ツールバーの支持部と送り駆動部、ツールサドルの支持部と送り駆動部およびテーブルの軸受支持部に想定した柔結合のばね要素は、それぞれの接触部での静剛性の理論解析により求めた。そして、地盤の等価ばね剛性は地盤を弾性体とみなし垂直方向地盤係数および水平方向地盤係数とコンクリート基礎の底面の寸法より求めた。²⁻¹⁰⁾ さらに機械支持部の剛性は、5つの

表2-3 立旋盤の振動特性計算のための各部材のモデル化

部 材 名	モ デ ル 化	サブシステム番号
ツ ー ル バ ー	3本の分布質量はり	1, 2, 3
ツールバーの支持部と送り駆動部	2つの無質量ばね	
ツ ー ル サ ド ル	2本の分布質量はり	4, 5
ツールサドルの支持部と送り駆動部	1つの無質量ばね	
ク ロ ス レ ー ル	6本の分布質量はり	6, 7, 8, 9, 10, 11
コ ラ ム	3本の分布質量はり	12, 13, 14
ベ ッ ド	5本の分布質量はり	15, 16, 17, 18, 19
自動工具交換装置(ATC)のツールマガジン	集中質量要素	23
サイドツールヘッド	集中質量要素	24
テ ー ブ ル	集中質量要素	25
テーブルの軸受支持部	1つの無質量ばね	
機 械 支 持 部	2つの無質量ばね	
コンクリート基礎	3本の分布質量はり	20, 21, 22
地 盤	1本の無質量ばね	26

レベリングブロックのコンクリート表面との垂直および水平方向の接触剛性より等価なばねに置き換えている²⁻¹⁰⁾

(ii) 解析結果

図2-18に示す立旋盤の数学モデルの切削点Cにおける工具点Aと品物点Bの間に作用するX, Y, Z各軸方向の相対加振力(A, B点に互いに反対方向に同じ大きさの力が働く)に対する各軸方向の相対変位に関する相対リセプタ

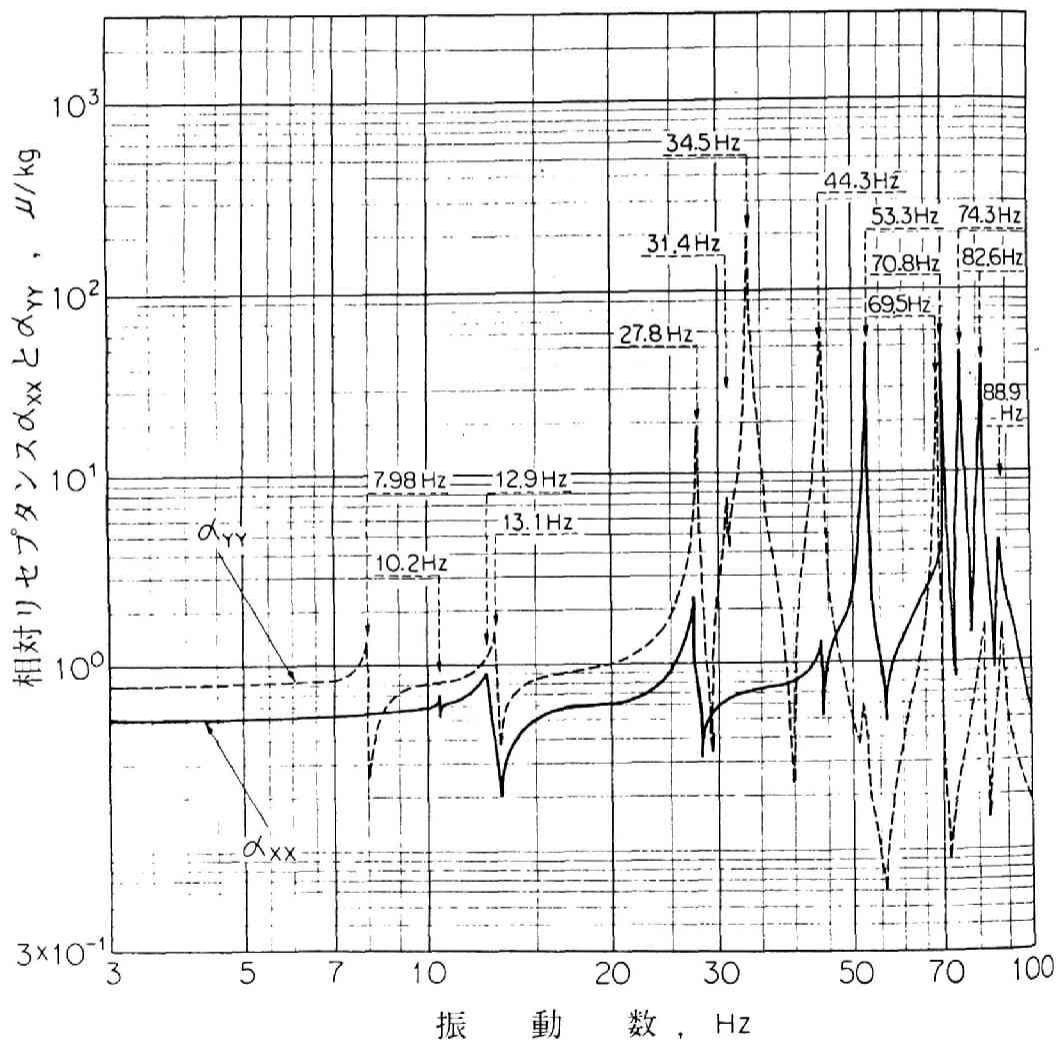
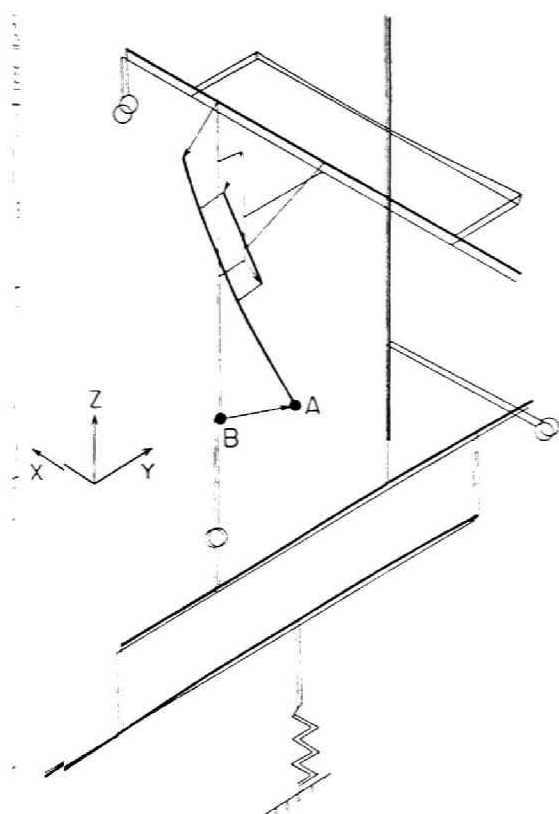


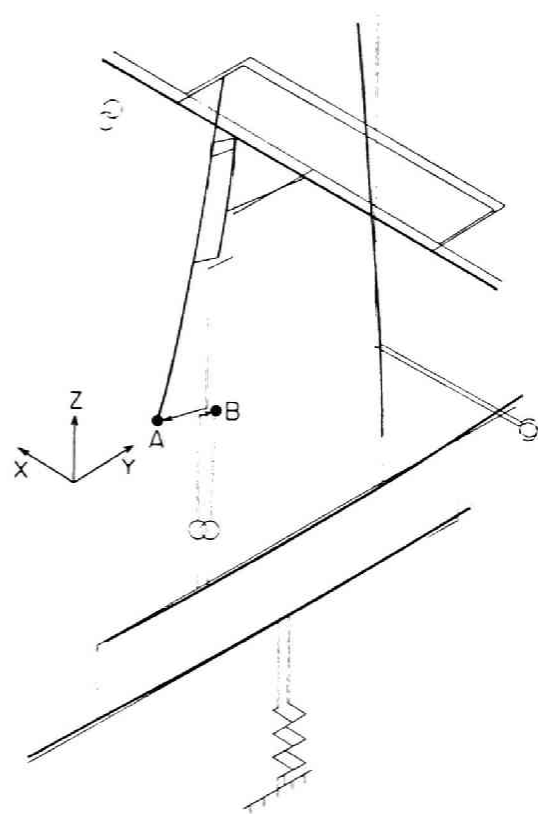
図2-19 切削点のA B間のXおよびY座標軸の相対加振力に対する同一方向の相対変位に関する相対リセプタンスの周波数応答の計算値

スの周波数応答を計算した。その計算結果のうちX軸（切削）方向の相対加振力に対するX軸方向の相対変位に関する相対リセプタンス α_{xx} と Y 軸（切込み）方向の相対加振力に対するY軸方向の相対変位に関する相対リセプタンス α_{yy} を図 2-19 に示す。図には静特性（十分 0 に近い振動数）から 100 Hz までのリセプタンスの周波数応答の計算結果が示されているが、これより 14 個の共振振動数を求め、図 2-19 中に点線の矢印の上の数字でその値を示している。この共振振動数のうち 34.5 Hz、44.3 Hz および 53.3 Hz の 3 つの固有モードのモード形の計算値を図 2-20、図 2-21、図 2-22 に示す。図中の太線が部材の変形モードを表わしている。また一方、この実際の機械に対する



モード 7 (34.5 Hz)

図 2-20 モード形の計算値



モード 8 (44.3 Hz)

図 2-21 モード形の計算値

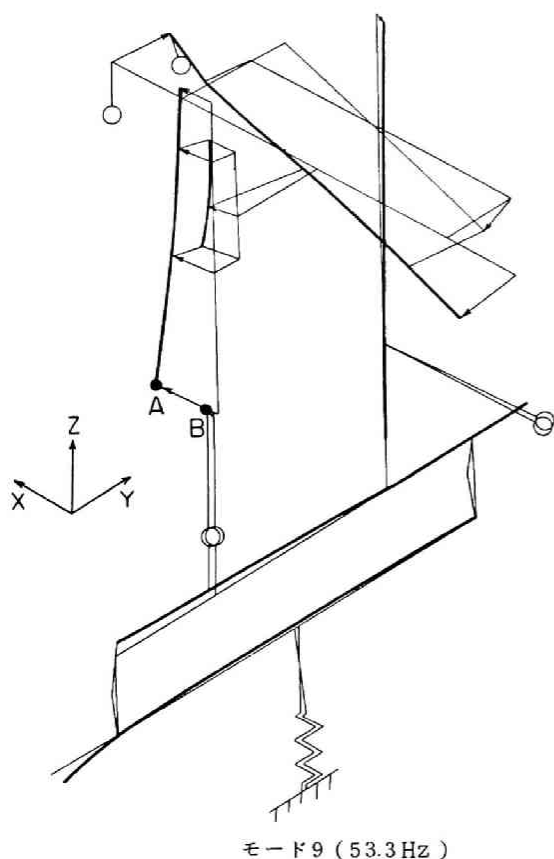


図 2-22 モード形の計算値

表 2-4 計算と実験より得られた各モード次数の共振振動数とモード形の主たる特徴

モード 次数	共振振動数(Hz)		モード形の主な特徴
	計算値	実験値	
1	7.98	—	垂直並進運動
2	10.2	13.1	X方向への並進と回転の混合運動
3	12.9	11.0	X方向への並進と回転の混合運動
4	13.1	12.0	Y方向への並進と回転の混合運動
5	27.8	—	垂直並進運動
6	31.4	—	コンクリート基礎の変形
7	34.5	29.0	クロスレールのねじり変形
8	44.3	42.6	地盤の変形(Y方向)
9	53.3	57.0	コラムのねじり変形
10	69.5	—	結合部の影響が大きい
11	70.8	—	クロスレールのねじり変形
12	74.3	—	テーブルの水平運動 結合部の影響が大きい
13	82.6	73.5	ツールバーの水平運動 結合部の影響が大きい
14	88.9	—	結合部の影響が大きい

動電型加振器による正弦波加振実験を行い、共振振動数とモード形を測定した。この計算値と実験値との対比を表 2-4 に示す。実験より得られた共振振動数は 7 個であるが、モード形の比較により表 2-4 のように計算と実験との対応をつけることができ、この表の右端にそのモード形の主な特徴を記入している。

(iii) 切削点での動剛性解析

設計性能の評価と最適化に重要な意味をもつ各固有モードでのモーダルフレキシビリティおよびエネルギー分布の様子を図 2-23 に表わす。図 2-23 の上

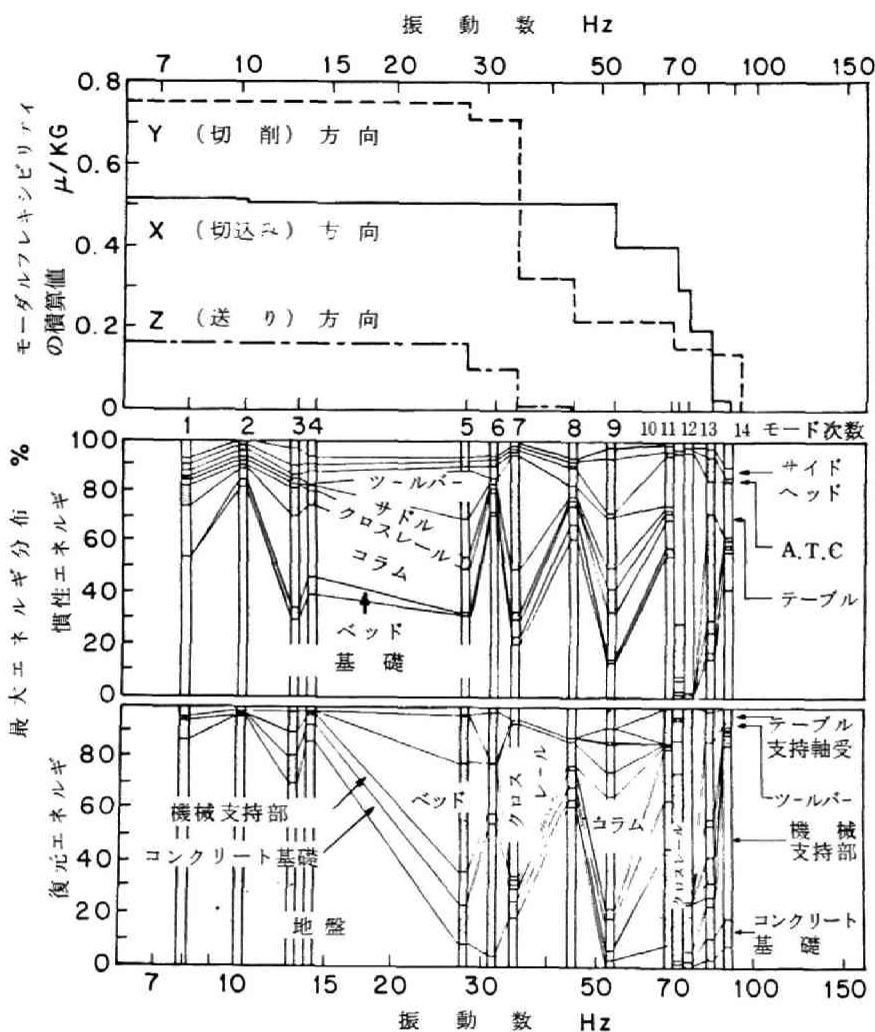


図 2-23 立旋盤の 14 次までの固有モードの積算モーダルフレキシビリティと最大慣性および復元エネルギー分布の計算値

図のプロットは、次の(2-45)式によって求まる着目する m 次モード以後のモーダルフレキシビリティの和を示しており(1-77)式より導かれる。

$$\begin{aligned}
 m \text{ 次モード以後の固有モードのモーダルフレキシビリティの和} &= \sum_{i=m}^{\infty} f_i \\
 &= f_s - \sum_{i=1}^{m-1} f_i
 \end{aligned} \quad (2-45)$$

ここで各固有モードでのモーダルフレキシビリティ f_m は、プラノミラーの例と同様に、図2-18の切削点Cでの工具点Aと品物点Bの間のX、Y、Z軸方向の相対加振力に対する同じ方向の相対変位の値により(2-42)式によって求まる。そして、図2-23上図において各共振振動数で現われているたて方向の段差が、(2-45)式よりわかるように、その固有モードのモーダルフレキシビリティの大きさを示している。7.98 Hzの1次共振モード以下の振動数域では、このプロットは静コンプライアンスを示している。また、1次から4次までの共振モードの各段差は非常に小さく、その共振モードが、切削点での動的剛性にほとんど影響をおよぼさないことを示している。このことは、これらのモード形が表2-4に示しているようにほぼ構造全体の剛体運動であることより容易に理解できる。

図2-23の下図は、各共振モードにおいて、機械システム全体に貯えられる慣性および復元エネルギーのどれだけが、その機械システムの主要な部材および要素に貯えられるかを表わしている。このうち最大慣性エネルギーの配分は、ある要素の質量成分が、その要素の並進および回転運動によって、その固有モードの振動にどれだけ影響をもっているかを示しているわけであるが、図2-23の慣性エネルギー分布よりわかるように、基礎の運動は高次の固有モードで大きな影響をもたず、高次になるほど、機械構造内の各部材に比して影響が次第に小さくなる。

一方最大復元エネルギーの分布は、各要素のフレキシビリティが固有モードの振動にどれほど影響をもっているかを示している。また、この値は共振モードでの減衰能を推定する基礎を与える。つまり、構造の各要素は、その要素に貯えられる最大復元エネルギーに近似的に比例する減衰エネルギーを消散する。この消散エネルギー係数は、その要素の材料の特性に大きく依存する。たとえば、鋼材料よりできている部材では小さく、一方、ボルト結合部、案内面等の結合部およびコンクリート基礎や地盤は大きな減衰係数をもっている。したがって結合部、地盤、基礎もしくは機械支持部が大きな復元エネルギー分布をもってい

る共振モードにおいては、その機械システムは大きな減衰能をもっていると予想できる。つまり、図2-23の下図に示すように、1, 2, 3, 4, 8 次の固有モードでは地盤の復元エネルギー分布が機械システム全体の復元エネルギーの50%を越えている。また、6次の固有モードでは基礎と機械支持部で復元エネルギー分布が大きい。よって、これらの固有モードでは大きな減衰能を示すと考えられる。さらに、10, 12, 13, 14次の固有モードでは機械支持部およびテーブル支持軸受等の結合部に復元エネルギー分布が大きく、これらの固有モードでもかなりの減衰能を示す予想できる。しかし、7次と11次の固有モードではクロスレールの部材自身に復元エネルギー分布が大きく減衰能は低いと考えられる。またこれらのモードは、モーダルフレキシビリティも高く振動特性上危険であると判定できる。同様にモード9（共振振動数の計算値53.3Hz、実験値57.0Hz）では、図2-23の下図よりわかるようにコラム部の復元エネルギーが全体の43%を占めており、コラムの部材自身の減衰能が低いことよりこの固有モードの減衰能も低いと考えられる。また、図2-23の上図よりわかるようにこの固有モードのモーダルフレキシビリティは大きく、したがって共振振動数付近のリセプタンスが大きいと思われる。よってこの固有モードは危険であると予想される。実際に切削実験を行い、重切削状態での再生型自励びびりの発生振動数を測定した結果では、57.0Hz付近の振動数でびびりが生じた。このびびりを生じにくい構造に改造するにはコラム部の剛性を高めることが必要であると判定できる。また切削実験での切削状態ではモード7およびモード11付近でのびびりは生じなかった。しかし57.0Hzでのびびりに対する改造設計を行った後、または他の切削状態ではこのびびりモード7および11が生じることが計算より予想され、クロスレールにおける剛性の向上も必要と考えられる。

2.2.5 結 言

機械構造物の静剛性および振動特性を設計の段階で解析し、そしてその特性

を評価し、さらに特性の改善および最適化設計を行うための解析手法としてリセプタンス合成法電子計算機プログラムシステムを開発し、その解析の原理、計算の方法および適用例を述べた。

このプログラムシステムの特長をあげると、

- (1) 多くのサブシステム（部材）からなる立体構造物の振動特性も合成を順次くりかえすことにより記憶容量を節約して計算することができる。
 - (2) 汎用性に富んでいて任意の構造物の振動特性をメインプログラムと比較的少ないデータを編集するだけで計算することができる。
 - (3) 分布した質量をもった部材として計算する（もちろん集中質量としても計算できる）ため集中質量による計算に比較して精度が高く無限自由度要素としてのモデル化ができる。
 - (4) 閉じたループをもつ構造の計算が特別の手法を用いることなく行える。
 - (5) 結合部をもつ構造の計算ができ、結合部に減衰要素を容易に入れることができる。
 - (6) 他の手法で計算されたサブシステムの振動特性の計算結果をこのプログラムシステムをもちいて合成することができる。
 - (7) 実験により得られたサブシステムの特性と合成してシステム全体の振動特性が得られる。これにより計算モデルによるシミュレーションの困難なものを計算の一部に加えることが可能である。
 - (8) 設計変更を行う場合、変更しない部分の計算結果を記憶しておき、設計変更を行うサブシステムのリセプタンスと合成をくりかえすだけで最初から計算をやりなおす必要がなく、設計変更による振動特性の変化が短い計算時間で得られる。これにより最適設計に容易にアプローチすることができる。
- 等があげられる。

第 3 節 動剛性合成法電子計算機プログラムシステム

2.3.1 緒 言

より複雑な部材により構成される機械構造の静剛性および振動特性をより正確に電子計算機プログラムによりシミュレーションし、さらにその特性の評価および最適化設計を行うために新しい解析手法として動剛性合成法電子計算機プログラムシステムを開発した。この手法は、構造物をいくつかの集中質量とそれをつなぎあわせる質量のない弾性はりで近似する集中質量要素によるモデル化、分布した質量をもつはりによるモデル化および複雑形状をもつ要素の特性をより正確にシミュレーションし得る有限要素によるモデル化の3つを結合したものである。また、減衰特性のシミュレーションを従来の方法より、より厳密に行うことができる。この節においてこの解析手法の原理ならびに計算方法と、この手法の適用例を示す。

2.3.2 解析および計算の原理

(i) 部分構造の動剛性

動剛性合成法による機械構造物の振動特性解析の手法の概略は、図2-24のフローチャートに示すことができる。まず、振動解析を行う機械構造物に対して、どの範囲までを振動システムとして考えるかを決定する。例えば、地盤、基礎等も考慮する必要があるときは、この部分を振動システム内に入れなければならない²⁻¹⁰⁾。この振動システムをいくつかの部分構造に分割し、各部分構造をさらに平板、はり、はね、質量およびダンパーのいずれかの要素にモデル化する。ただし、その振動システムが比較的少ない数の要素でモデル化できる小規模な構造の場合には必ずしも部分構造に分割する必要がない。部分構造に分割する場合、その部分構造が固定端をもたない限り、それがフリーフリーの状態にあるものとして以下の解析を行う。まず、その各部分構造について、(2-46)式の動剛性マトリクス $[K_s]$ を組み立てる。

$$\{F_s\} = [(K) - \omega^2(M) + i(C)] \{X_s\} = [K_s] \{X_s\} \quad (2-46)$$

ここで、 $\{F_s\}$ および $\{X_s\}$ は、部分構造内の全節点での力および変位を表わす列ベクトルであり、 ω は角振動数、 i は虚数単位、 $[K]$ および $[M]$ は、有限要素法で用いられると同じ剛性および質量マトリックス²⁻¹²⁾を表わしている。また、 $[C]$ は減衰マトリックスであり、これに関しては部材の材料内部減衰マトリックスは次のようにして求めることができる。

すなわち材料内部減衰は、各振動

モードにおいてその材料の単位要素における応力 σ の大きさに依存する非線形性を示すとされている。²⁻¹³⁾ その非線形性を考慮して、材料要素における減衰比を求めることもできるが、しかし機械システム全体よりみると、材料内部減衰よりも結合部における減衰能の方が大きく、材料内部減衰の非線形性は実用

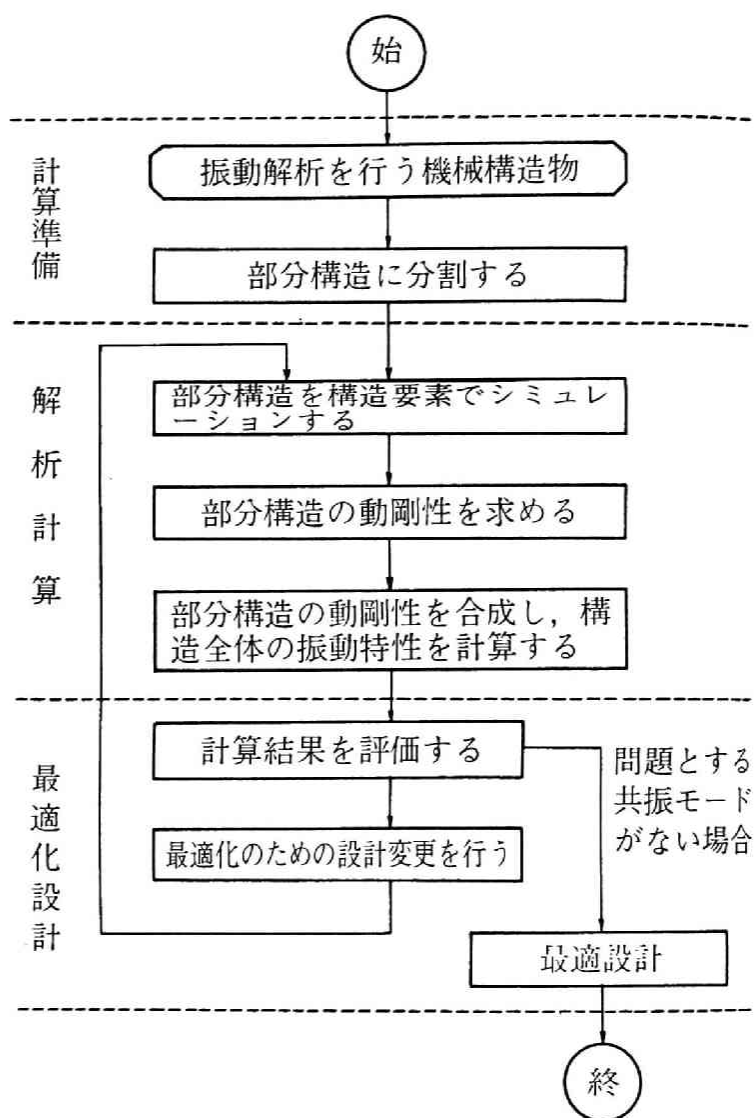


図 2-24 動剛性合成法による機械構造物の振動特性解析
ならびに最適設計のフローチャート

的には多くの場合無視してよいと考え得る。よって、材料自身の減衰エネルギーがその部分に貯えられる復元エネルギーに比例すると仮定して、実験より得られた減衰比より、材料自身の減衰マトリックス $[C_M]$ は、

$$[C_M] = 2\zeta [K] \quad (2-47)$$

として求まる。

いまある部材が分布質量をもつはり要素に近似できる場合には、 $[K_S]$ をリセプタンス合成法で用いられると全く同じ解析式より求めている。つまり、さきにリセプタンス合成法で述べられた(2-7)式の逆行列に相当するものを求め、(2-10)式などのリセプタンスの解析式をそのまま使用している。

(iii) 部分構造の動剛性の合成

さて、部分構造に関してたてられた(2-46)式の連立方程式を変位マトリックス $\{X_S\}$ について解いて、その解の中からその部分構造に外力が加わると想定される節点(例えば切削点)および他の部分構造との結合端の節点の力 $\{F_J\}$ と、その部分構造内の全節点の変位 $\{X_T\}$ との間の関係を示す部分だけを抜き出し、次の(2-48)式とする。

$$\{X_B\} = [R_S] \{F_J\} \quad (2-48)$$

ここに、 $[R_S]$ はリセプタンスマトリックスであり、振動数の関数である。この(2-48)式を変形して、この部分構造の外力が加わると想定される節点および他の部分構造との結合節点の力 $\{F_J\}$ と、その節点の変位 $\{X_J\}$ との間の(2-49)式の関係を求める。

$$\{F_J\} = [K_D] \{X_J\} \quad (2-49)$$

この動剛性マトリックス $[K_D]$ を、各部分構造について求めておき、次の段階においてすべての部分構造を合成し、機械構造全体の振動特性を解析する。その合成において合成を行う部分構造間で、これらの動剛性マトリックスを、下記の(2-50)式のマトリックス $[K_{TD}]$ 上の対応する節点上に重ね加え合わせる。

$$\{F_T\} = [K_{TD}] \{X_T\} \quad (2-50)$$

ここで、隣り合った部分構造間の合成または、1つの部分構造内の結合部に関

しては、さきに開発したリセブタンス合成法におけると同様に、剛結合と柔結合の2種類の結合状態を考える。剛結合においては、上記の方法によって得られる(2-50)式の連立方程式をそのまま解けばよい。一方、柔結合においては、以下に述べる原理に従って計算を行う。

(iii) 柔結合部の動剛性

いま、図2-25に示すように、2つの部分構造または1つの部分構造内の接触結合面において、ミクロな表面の凹凸または油膜その他を介して結合されているとする。この場合、結合部自身もエネルギーを貯え、さらに消散させる1つの要素と考え得る。いま、接触結合面自身をシミュレーションするに、図2-25に示すように部分構造(または1つの部分構造内での要素)PとQがJ個の結合節点で、ばねと

ダンパによって結合されているとする。この接触結合面間の要素の最も単純な表示法の色々を図2-

26に示す。ボルト結合部、静圧案内面、すべり案内面その他により接触結合面間の要素の適切な表示法が異なり、その物理的な意味をよりよく表わしているものを選択しなければならない。一例として部分構造Pの結合端である1つの座標 x_p と、同方向の部分構造Qの結合端の座標 x_q を想

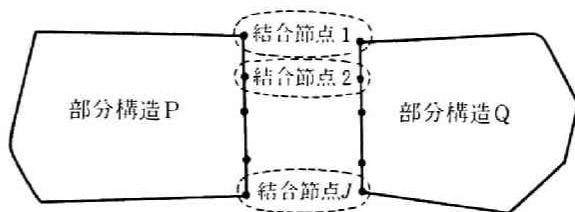


図2-25 柔結合の場合の合成の説明図

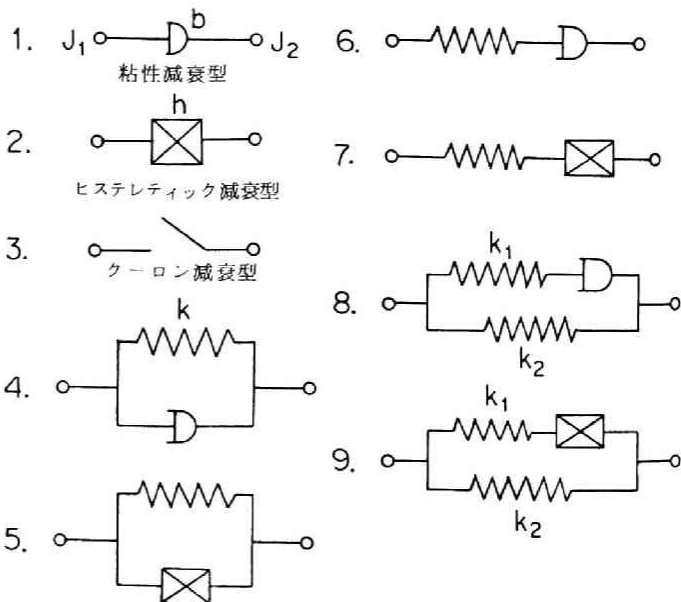


図2-26 接触結合面要素の例

定し、ある1つの結合節点のある1つの座標方向に、図2-26の4に表わす、ばね定数 k のばねと粘性減衰係数 b のダンパーの並列モデルを考える。このとき、 x_p および x_q における力の大きさを F_p および F_q と表すと、力 F_p および F_q とその座標方向変位 $x_p = X_p e^{i\omega t}$ および $x_q = X_q e^{i\omega t}$ の間の関係が、次の(2-51)式のように求めることができる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} F_p \\ F_q \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} k_{11}, & -k_{12} \\ k_{21}, & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k-ib\omega), & -(k+ib\omega) \\ -(k+ib\omega), & (k+ib\omega) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_p \\ X_q \end{Bmatrix} \\ &= [K_{JD}] \begin{Bmatrix} X_p \\ X_q \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2-51)$$

$$\text{さらに、たとえば図2-26の2では } [k_{11}] = [ih] \quad (2-52)$$

$$5. \text{では } [k_{22}] = [k+ih] \quad (2-53)$$

$$6. \text{では } [k_{11}] = \left[\left(\frac{k b^2 \omega^2}{k^2 + b^2 \omega^2} \right) + i \left(\frac{k^2 b \omega}{k^2 + b^2 \omega^2} \right) \right] \quad (2-54)$$

$$8. \text{では } [k_{22}] = \left[\left(\frac{k_1 b^2 \omega^2}{k_1^2 + b^2 \omega^2} + k_2 \right) + i \left(\frac{k_1^2 b \omega}{k_1^2 + b^2 \omega^2} \right) \right] \quad (2-55)$$

と表わせ、復元エネルギーに比例しない減衰エネルギーもモデル化することができる。この J 個の結合節点間の各座標方向について求められた動剛性マトリックス $[K_D]$ を、(2-50)式に得られている動剛性マトリックス $[K_{11}]$ の相当する節点でのマトリックス上に、さらに重ね加え合わせる。

Ⅳ 周波数応答

このようにして得られた(2-50)式の連立方程式を $\{X\}$ について解けば、この合成されたシステムを1つの部分構造とみなしたときの(2-48)式と同様の式を得る。この(2-48)式から(2-50)式の間の計算過程を必要な合成回数だけ繰返すと、最終的に下記の(2-56)式のような、外力が加わると想定される点の力 $\{F\}$ とその点の変位 $\{X\}$ の間のリセプタンス $[R]$ が得られる。

$$\{X\} = [R] \{F\} \quad (2-56)$$

このリセプタンス〔 R_E 〕を問題とする振動数範囲内の多くの振動数に対して求めれば、機械構造全体の周波数応答が得られる。そして、十分に低い振動数に対するリセプタンスを計算することにより、近似的に静特性を求めることができる。ただし、固定端をもつ部分構造の場合は、0の振動数に対するリセプタンスにより静特性が計算できる。また加振力 F_E と変位 X_E の間の位相差 φ は、(2-56)式の複素数のリセプタンス〔 R_E 〕において、そのうちの実リセプタンス α_r と虚リセプタンス α_i より次式として定まる。

$$\varphi = \tan^{-1}(\alpha_i/\alpha_r) \quad (2-57)$$

(V) モード形

次に、この共振振動数に対するモード形を求めるためには、各共振振動数において周波数応答を求めたときの(2-48)式から(2-50)式の解析の過程の逆の過程の計算を行い、各部分構造における(2-48)式の $\{X_N\}$ を求める。これを構造全体にわたってプロットすれば、モード形が得られる。つまり、合成後の(2-48)式に相当する式から結合端の変位 $\{X_J\}$ を求め、これを(2-49)式に相当する式に代入し、結合端の力 $\{F_J\}$ を求め、この $\{F_J\}$ を合成前の(2-48)式に相当する式に代入することによって $\{X_N\}$ が得られる。

(VI) エネルギー分布

次に、この $\{X_N\}$ より、最適化設計のために必要な、機械構造全体にわたるエネルギー分布を求める。各部分構造の最大復元エネルギー V_{sm} 、最大慣性エネルギー T_{sm} および1周期当りの減衰エネルギー D_{sm} は、次の(2-58)式、(2-59)式および(2-60)式より計算する。

$$V_{sm} = \frac{1}{2} \{X_N\}^T [K] \{X_N\} \quad (2-58)$$

$$T_{sm} = \frac{1}{2} \omega_m^2 \{X_N\}^T [M] \{X_N\} \quad (2-59)$$

$$D_{sm} = \pi \{X_N\}^T [C] \{X_N\} \quad (2-60)$$

これらのエネルギー値をすべての部分構造について総計することにより、構造物全体が持つ最大復元エネルギー V_{Am} 、最大慣性エネルギー T_{Am} 、および一周期当り

の減衰エネルギー D_{Am} を求めることができる。また、各要素の節点での変位を $\{X_e\}$ とし、その要素の剛性マトリックス $[K_e]$ 、質量マトリックス $[M_e]$ 、減衰マトリックス $[C_e]$ を用いて、その要素の最大復元エネルギー V_{em} 、最大慣性エネルギー T_{em} 、1 周期当りの減衰エネルギー D_{em} は (2-58) 式、(2-59) 式、(2-60) 式の計算の過程で、

$$V_{em} = \frac{1}{2} \{X_e\}^T [K_e] \{X_e\} \quad (2-61)$$

$$T_{em} = \frac{1}{2} \omega^2 \{X_e\}^T [M_e] \{X_e\} \quad (2-62)$$

$$D_{em} = \pi \{X_e\}^T [C_e] \{X_e\} \quad (2-63)$$

として求まる。同様に、結合部における復元エネルギー V_{Jm} および減衰エネルギー D_{Jm} は節点間の変位 $\{X_J\}$ 、結合部剛性マトリックス $[K_J]$ および結合部減衰マトリックス $[C_J]$ より、

$$V_{Jm} = \frac{1}{2} \{X_J\}^T [K_J] \{X_J\} \quad (2-64)$$

$$D_{Jm} = \pi \{X_J\}^T [C_J] \{X_J\} \quad (2-65)$$

として求まる。これより各固有モードでの機械システム全体の各種エネルギー分布を求めることができる。

(VII) モーダルフレキシビリティと減衰比

次に、この各固有モードでのエネルギー値をもちいて、その固有モードでのモーダルフレキシビリティ f_m および減衰比 ζ_m を次の式により求める。

$$f_m = \frac{X_{em} X_{cm}}{2 V_{Am}} \quad (2-66)$$

$$\zeta_m = \frac{D_{Am}}{4 \pi V_{Am}} \quad (2-67)$$

ここで X_{em} および X_{cm} はこのエネルギー分布状態における問題とする点の変位（工作機械においては、切削点での工具 A と品物 B の間の相対変位）の大きさである。このモーダルフレキシビリティ f_m および減衰比 ζ_m の値は、固有値

の性質により、そのエネルギー分布が計算された振動数 ω が、共振振動数 ω_m と厳密に一致しなくても十分に近ければ精度よく求めることができる。

(VIII) 振動内部力

さらに結合部の剛性および減衰能の解析その他に必要な結合部節点間の振動内部力 F_J は、結合部節点変位 $\{X_J\}$ 、結合部動剛性マトリックス $\{K_{JD}\}$ より、

$$\{F_J\} = \{K_{JD}\} \{X_J\} \quad (2-68)$$

として上記計算の過程で求まる。同様にして部材内節点の内部力も計算される。

(IX) 共振振動数および周波数応答の効率のよい求め方

周波数応答より効率よく共振振動数を計算するために、その共振振動数付近での応答を 1 自由度系の振動モデルのそれに近似し、以下に述べるようにして共振振動数を精度よく推定することができる。いま、図 2-27 に示すような共振曲線において、真の共振振動数が ω_m であるとする。一方その前後のリセプタンス値が計算されている振動数を ω_1 、 ω_2 とし、そのときのリセプタンス値を R_1 、 R_2 とすれば、共振振動数 ω'_m は、近似的に次の (2-69) 式によって求められる。

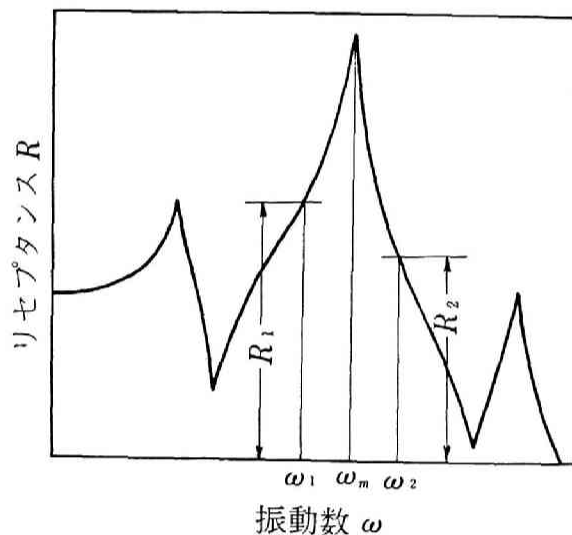


図 2-27 共振曲線の例

$$\omega'_m = \sqrt{\frac{a \omega_2^2 + \omega_1^2}{a + 1}} \quad (2-69)$$

ここで、 $a = |R_2/R_1|$ である。さらに、この推定した共振振動数 ω'_m と他の振動数との間でこの (2-69) 式により共振振動数を推定し、この操作を数回

繰り返すことにより正確な共振振動数を効率良く求めることができる。またこの操作は計算機プログラム上で自動的に行なわれる。また、共振振動数付近の1つの振動数 ω での(2-66)式のモーダルフレキシビリティ f_m と(2-67)式の減衰比 ζ_m より、モード連成のない場合のリセプタンスの最大値 R_m は、

$$R_m = \frac{f_m}{2\zeta_m} \quad (2-70)$$

として求まる。以上の方法により比較的少ない数の振動数に対するリセプタンスを計算することによって共振振動数および周波数応答(またはベクトル軌跡)を求めることができる。

この動剛性合成法電子計算機プログラムシステムの構成、使用法および入力データの作成法をマニュアルとしてまとめ、日本機械学会工作機械システムの自動保守研究分科会研究分科会研究成果報告書「群制御工作機械システムの自動保守に関する研究」²⁻¹⁴⁾に記載している。またその概要を付録に示す。

2.3.3 適用例

動剛性合成法プログラムシステムを用いて計算を行った例を、単純なものより順に述べる。

(1) 薄平板モデルの振動特性

図2-28は、600mm×600mmで厚さ6mmの鋼板製正方形部材において、振動特性の計算と実験を行ったものの中からモード形の抜粋を示している。実験ではスポンジで4隅を支持して加振実験を行った。図2-28の(b)、(c)、(d)は、その平板の片面に高さ10mm巾5mmの長方形断面の棒状部材をリブとして溶接したものである。計算では平板を6枚の長方形薄板要素、そしてリブをはり要素としてモデル化を行い、フリーフリーの境界条件をもつ1つの部分構造として解析した。図中のモード形の1点鎖線はノーダルラインを、そしてカッコ内は共振振動数の実験値を示している。計算と実験との対応はモード形の点から

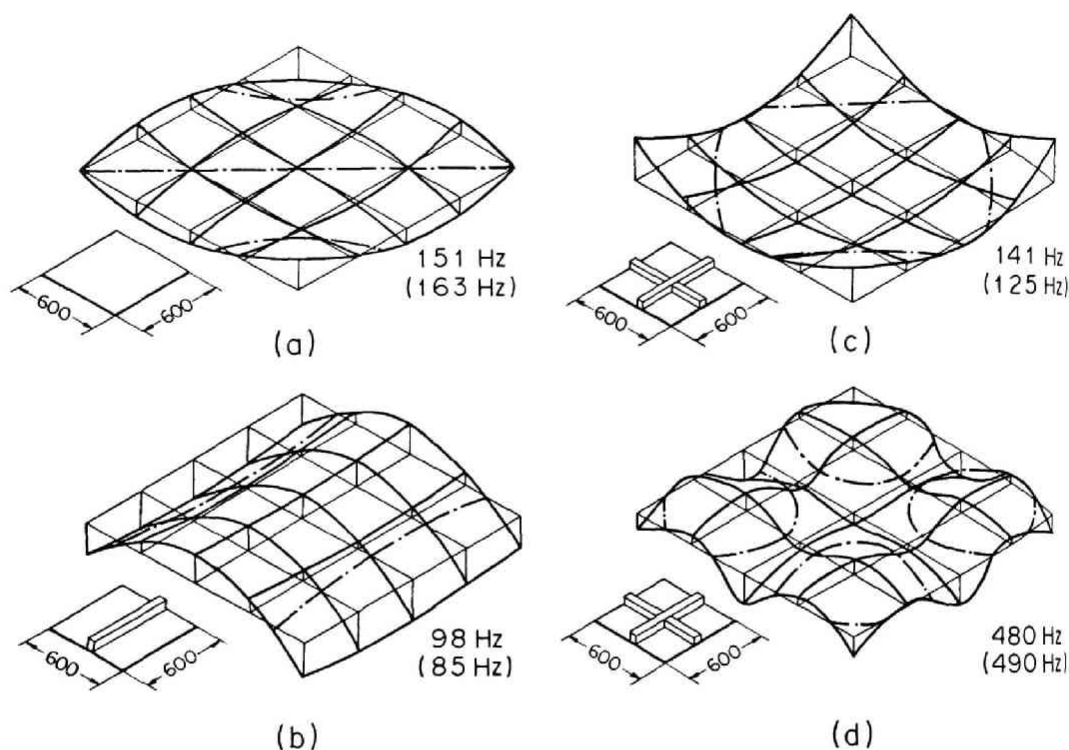


図 2-28 正方形薄平板の固有モードのシミュレーション結果

(フリーフリーの境界条件，カッコ内は実験値)
1点鎖線はノーダルラインを示す，板厚=6mm

もよくとれていた。

(2) 開口部をもつNCボール盤のコラムの静剛性

図 2-29 は，実際の NC ボール盤のコラムで開口部をもつものの静剛性を求めるための計算モデルを示している。ここで，すべり面部材を 10 本のはり要素，他を 85 枚の長方形薄板要素でモデル化した。図に示すように外力として，曲げ変形を生じる P_1 なる 4 つの外力と，ねじり変形を生じる P_2 なる 4 つの外力を想定している。この計算においては，コラムを 1 つの部分構造とみなし，他の部分構造との合成を行っていない。図 2-30 は静的な曲げ変形のための 4 つの外力 ($P_1 = 1. \text{ kg}$) が加わったとき，各板要素に貯えられる単位面積当りの復元エネルギー分布を示している。図 2-31 はねじり変形のための 4 つの外力

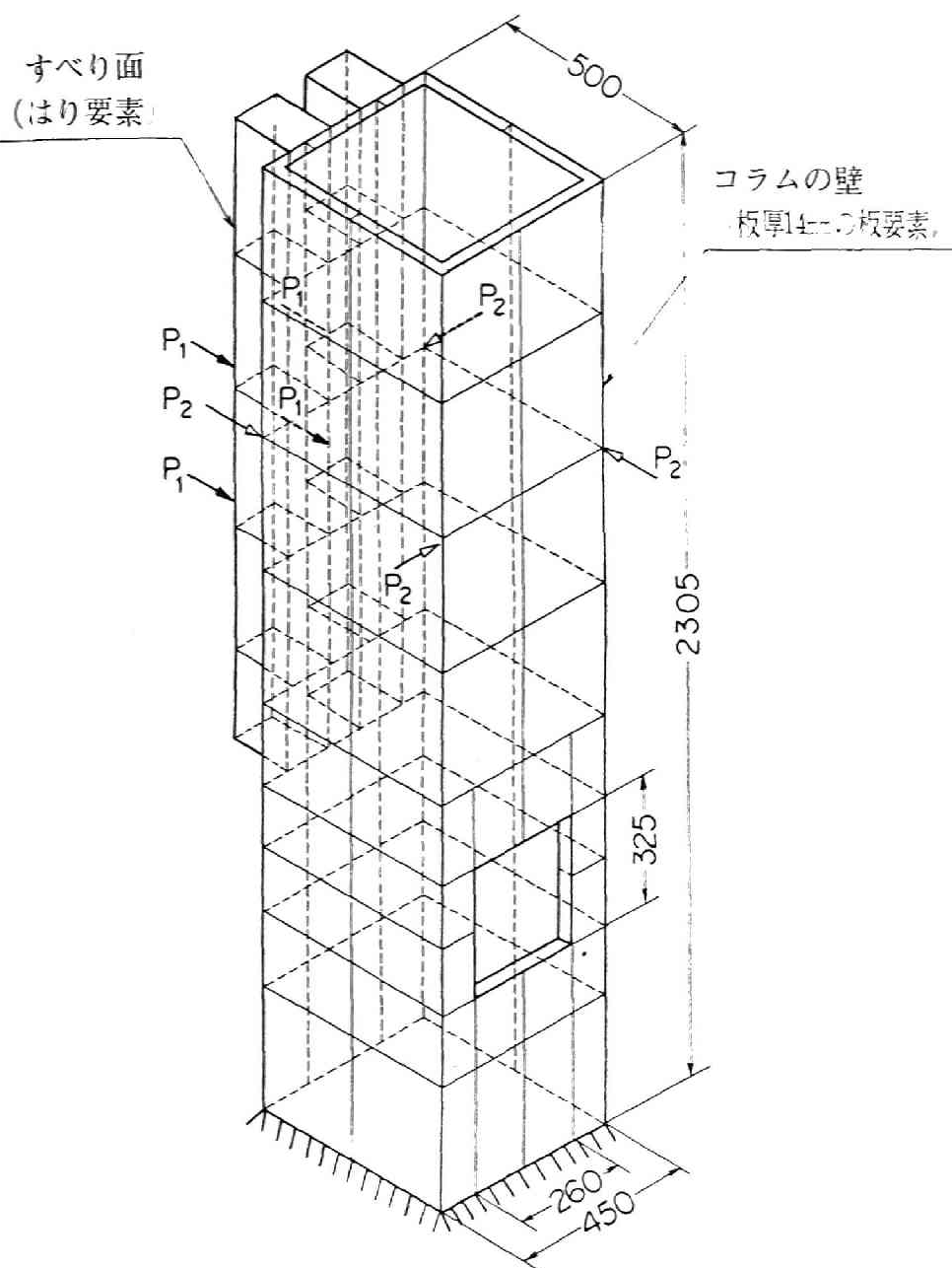


図 2-29 開口部をもつRCボール盤のコラムの数学モデル

(P_1 : 曲げ変形のための外力)
(P_2 : ねじり変形のための外力)

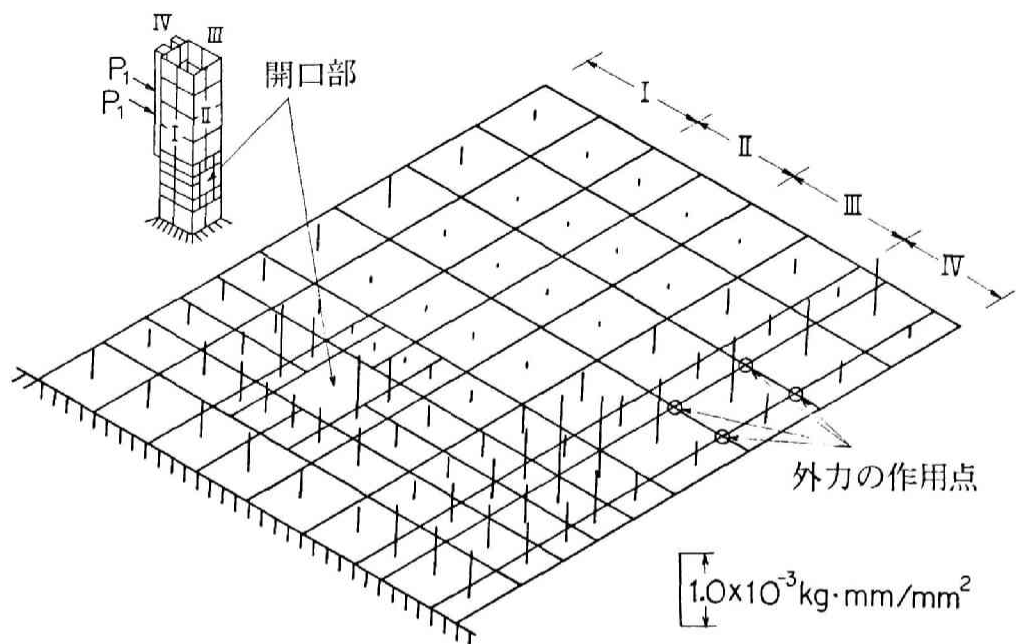


図 2-30 静的な曲げ力 (P_1) により板要素に貯えられる単位面積当りの復元エネルギー

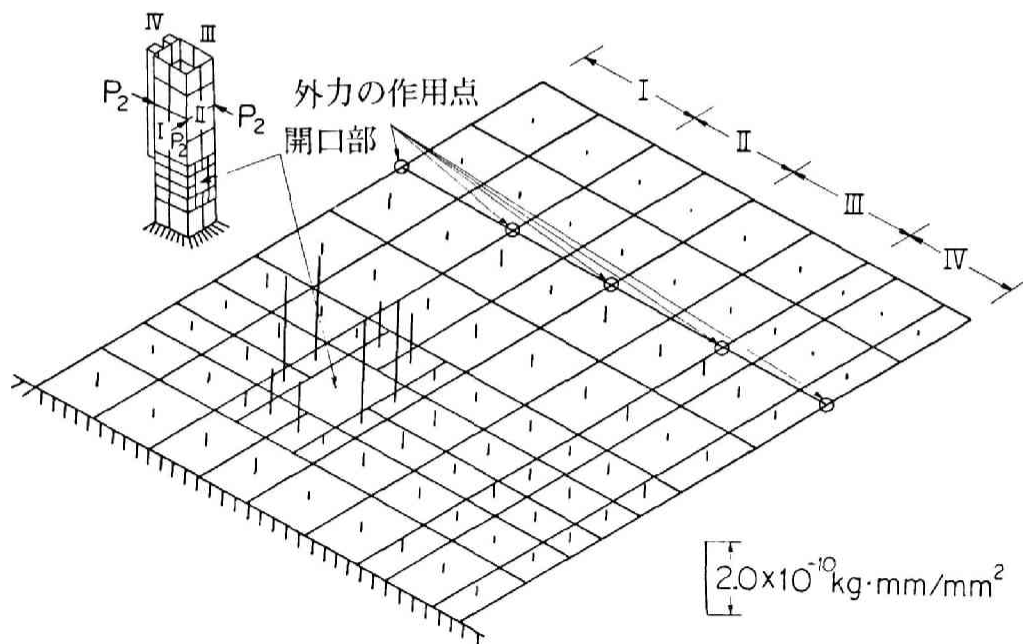


図 2-31 静的なねじり力 (P_2) により板要素に貯えられる単位面積当りの復元エネルギー

($P_2 = 1.49$) の場合の単位面積当りの復元エネルギー分布を示しており、ねじり変形の場合には特に開口部の付近に復元エネルギー分布の集中を生じていることがわかる。

(3) 門型フライス盤の縮尺模型

図2-32は、この動剛性合成法による電子計算機プログラムを使って計算を行い、そして実験結果と比較し、さらに最適化設計を実施した門型フライス盤の縮尺模型である。これは鋼板を溶接して作られており、4つのゴムパッドの上に置かれている。この構造全体を9つの部分構造に分割し、スピンドルを3本のはり要素、ゴムパッドは4つのばね要素、他の部分構造を合計214枚の長方形平板要素でモデル化した。そして、解析の原理で述べた手法に従って、工具側の切削点に相当するA点と品物側の切削点に相当するB点の間の相対的な振動特性を求めた。図2-33には、加振実験ではA、Bいずれか一方の点の変位のみが容易に測定できるので、それと比較するために相対振動変位ではなく、工具側のA点のみのZ軸方向およびY軸方向の共振曲線の計算結果

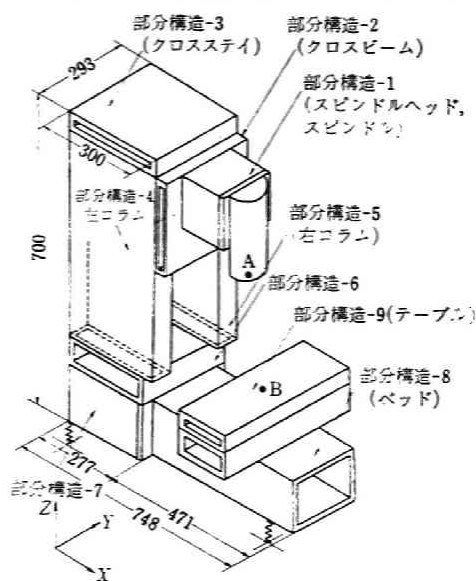


図2-32 門型フライス盤縮尺模型の解析計算モデルの説明図

および実験結果を示している。ここに、実線が計算値、点線が実験値である。この結果からXZ平面内の共振振動数は、計算値が235Hz、実験値が220Hzであることがわかる。また、Y軸方向の共振振動数の計算値が252Hzで、実験値が240Hzであった。これらの共振モード以下の低次の共振モードは、AB間のモーダルフレキシビリティが小さく、重要なモードではないので、図2-33では省いている。

表2-5は、AB間に相対的に作用する振動力による相対的振動変位に関する

る各座標方向の静的なコンプライアンス、および共振振動数におけるAB間のモーダルフレキシビリティの計算結果を示している。ここで、X方向とZ方向の共振振動数は、同じ面内の振動のため、等しい値となっている。この表より、AB間のX方向の静的コンプライアンスは、 $0.210 \mu\text{m}/\text{kg}$ であり、また共振振動数235Hz(実験値220Hz)でのAB間のモーダルフレキシビリティは $0.154 \mu\text{m}/\text{kg}$ で、この一つの共振モードで静的コンプライアンスの73%余りを占めていて、ほかに無限

に存在するは

ずの共振モー

ドのモーダル

フレキシビリ

ティを加えて

も、静的なコ

ンプライアンス

の27%に

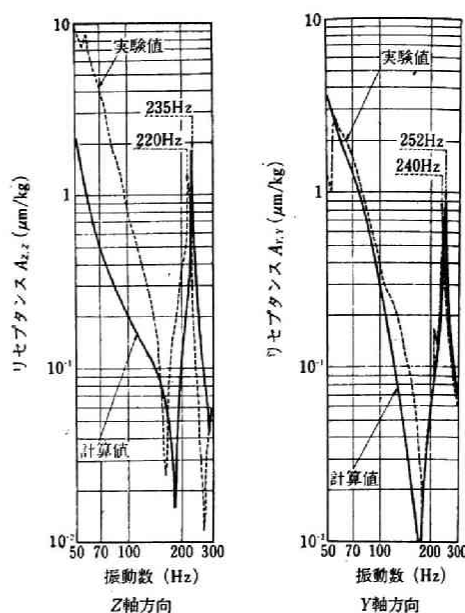


図2-33 A点での共振曲線の計算値と実験値

表2-5 AB間に相対的に作用する振動力による静的コンプライアンス
およびAB間のモーダルフレキシビリティの計算結果

	X 方 向		Y 方 向		Z 方 向	
	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比	静的コンプライアンス およびモーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	静的コンプライアンスに対する比
静的コンプライアンス	0.210	1.0	0.192	1.0	0.115	1.0
共振振動数 235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	0.733	—	—	0.0779	0.677
共振振動数 252 Hz (実験値 240 Hz)	—	—	0.117	0.609	—	—

しかならず、この座標方向では、この共振モードが最も再生型自励びびりに対して不安定となりうると考えられる。また、Y方向については、共振振動数252Hz(実験値240Hz)で、静的コンプライアンスの60%余りを占めていて、同様にこの共振モードも、再生型自励びびりに対して不安定となりうる。図2-34および図2-35は、これらの問題となるXZ平面内の共振振動数235HzとY方向の共振振動数252Hzのモード形の計算結果を示している。

これらの共振振動数に相当する実際に測定したモード形の実験結果とよく対応がとれていた。

表 2-6 は、これらの共振モードにおいて、各部分構造に蓄えられるエネルギー分布の比率の計算結果を示している。

共振振動数 235 Hz においては、部分構造 6, 7, 8 において復元エネルギーが大きく分布しており、これらの部分構造の設計変更を要することがわかる。共振振動数 252 Hz では、部分構造 7 および 8 のベッド部のねじり変形による復元エネルギーの集中が生じていることがわかる。このような問題となる

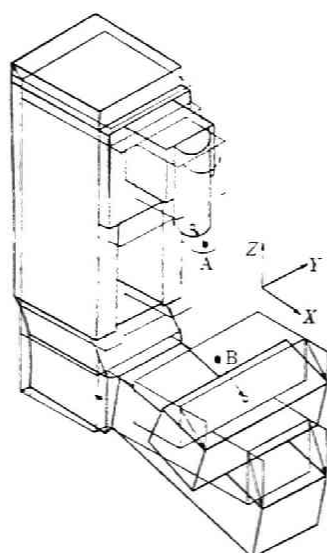


図 2-34 共振振動数 235 Hz のモード形の計算結果

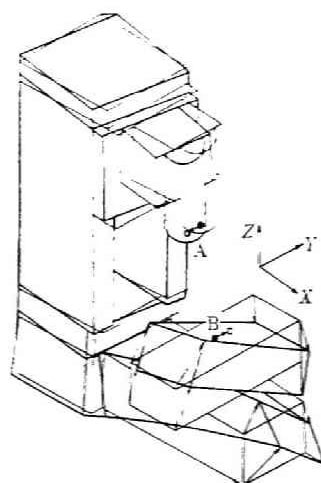


図 2-35 共振振動数 252 Hz のモード形の計算結果

表 2-6 共振モードにおけるエネルギー分布の計算結果

	XZ 平面内の共振振動数 235 Hz		Y 方向の共振振動数 252 Hz	
	復元エネルギーの分布割合	慣性エネルギーの分布割合	復元エネルギーの分布割合	慣性エネルギーの分布割合
部分構造 1	0.000 255	0.042 6	0.009 77	0.065 2
部分構造 2	0.001 45	0.033 0	0.004 44	0.023 3
部分構造 3	0.001 13	0.039 3	0.003 17	0.020 3
部分構造 4	0.027 6	0.058 0	0.022 2	0.042 3
部分構造 5	0.027 6	0.058 0	0.021 9	0.040 6
部分構造 6	0.335	0.038 9	0.038 7	0.013 7
部分構造 7	0.326	0.028 7	0.294	0.018 2
部分構造 8	0.214	0.216	0.425	0.164
部分構造 9	0.028 6	0.485	0.139	0.612
ゴムパッド部	0.049 0	—	0.041 9	—
計	1.0	1.0	1.0	1.0

共振モードにおけるエネルギー分布の結果より、設計変更を必要とする部分構造を実際に改造した様子を図 2-36 に示す。そして、表 2-7 に、原設計と改造設計後の共振振動数の計算結果と実験結果および AB 間のモーダルフレキシビリティの計算結果を表している。改造設計 1 では、部分構造 7 と 8 の箱型構造

にエンドプレートを付け、ベッドのねじり変形に対する補強を行っている。また、改造設計2では、改造設計1につけ加えて、部分構造6の中空の構造にエンドプレートを付け、さらに部分構造7と8のベッド部の上

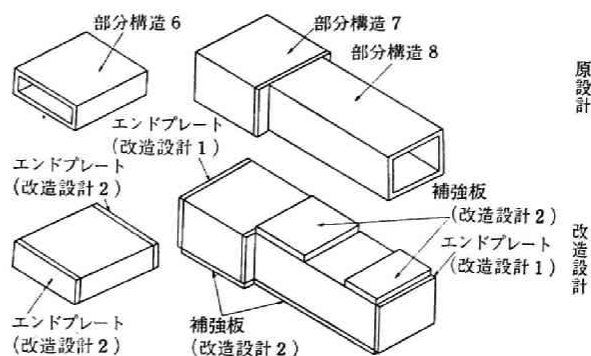


図2-36 部分構造の改造設計

面と下面に補強板を溶接してはり付けた。これらの改造設計により、共振振動数が上昇し、モーダルフレキシビリティが低下しており、設計変更によって、振動特性が改善されていることがわかる。

2.3.4 結 言

複雑な機械構造物の静的変形特性

および動的変形特性を設計の段階で解析し、より振動を生じにくい機械構造を設計するために、動剛性合成法による電子計算機プログラムシステムを開発した。この解析手法は、多くの機械要素または部分構造よりなる機械システムの静剛性および振動特性を、それらの要素の特性を合成して計算し、その特性を評価し、さらに最適化を行うものであり、思想的にはリセプタンス合成法と同じであるが、モデル化し得る構造要素が通常の有限要素法のそれを含み、より複雑なモデル化を行うことができる。さらにリセプタンス合成法と同様に分布質量をもつ無限自由度要素の計算ができる。また、データの作り易さ、計算時間の大幅な短縮の点でもリセプタンス合成法に比べてより実用的に性能のよいものである。

表2-7 改造設計後の共振振動数とAB間のモーダルフレキシビリティの計算結果

	共振振動数とAB間のモーダルフレキシビリティ			
	X 方 向		Y 方 向	
	共振振動数	モーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)	共振振動数	モーダルフレキシビリティ ($\mu\text{m}/\text{kg}$)
原設計	235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	252 Hz (実験値 240 Hz)	0.117
改造設計1	235 Hz (実験値 220 Hz)	0.154	308 Hz (実験値 290 Hz)	0.0814
改造設計2	292 Hz (実験値 280 Hz)	0.0821	327 Hz (実験値 310 Hz)	0.0693

この解析手法の主な特徴は、次のとおりである。

- (1) 機械構造全体を複数個の部分構造に分割し、これを順次合成して、機械構造全体の特性を求める。このために、計算機内で必要とされる記憶容量のほとんどは、部分構造の動剛性の結合端間の関係のみについて記憶するものでよく、記憶容量の節約が行われている。またすべての部分構造の計算において必要十分な計算精度が得られるよう、機械構造を部分構造に分割すれば、機械構造全体の計算精度を保証しうる。
- (2) 本手法においては、要素番号および節点番号は各部分構造についてそれぞれ独自に付けるので、構造全体にわたって通し番号で付ける通常の有限要素法の計算手法の場合に比べ、容易であり誤りも少ない。また、最適化設計を行う場合の設計変更を容易に行える。
- (3) 隣接する構造部分相互間の結合には剛結合または柔結合の計算を行うことができる。柔結合においては、ばねとダンパ要素により結合されている場合の計算ができるが、これは従来の有限要素法で行われてきた等価な減衰率を用いて行う比例減衰の仮定（減衰係数が剛性係数に比例するとする仮定）にたった減衰特性の計算に比して、現実の物理的モデルにより近い状況で減衰要素の効果をシミュレーションできる。
- (4) 本手法は上記のシミュレーション計算の結果を評価して、エネルギーバランス理論による最適化設計を行うために必要な判断資料を設計者に提示する機能をもっている。これにより、振動特性における CAD の本来の目的を容易に達し得る。

第 4 節 結 論

機械構造物の静剛性および振動特性を解析し、さらにその特性の改善および最適化設計を行う道具として、リセプタンス合成法と動剛性合成法による電子計算機プログラムシステムを開発した。そしてその計算原理と計算方法を述べ、さらにその手法の適用例を示し、その手法の妥当性を実証した。リセプタンス合成法は無限自由度をもつ要素をモデル化できること、そして動剛性合成法は、はり骨組集中質量法、はり骨組分布質量法および有限要素法によるモデル化ができ種々の手法の利点を取り入れ新しい手法としていることに特長があると考ええる。

この解析手法を用いて第Ⅰ章で考察した振動特性の評価および最適化設計を実行することができる。以下の解析においては、この第Ⅱ章の解析手法を理論解析の 1 つの手段として使用する。

第Ⅲ章 結合部の動的剛性と減衰能の解析および 構造部材の剛性の評価

第 1 節 緒 論

機械構造物の振動特性は、機械システム全体に着目することによりはじめて解析できるが、機械システム全体の特性を求めるには、その構成要素の特性が正確に把握されていなければならない。たとえば、第Ⅲ章の電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解析法は機械システムの個々の構成要素の特性を合成し機械システム全体の特性を求めるものであるが、もし結合部も含む各々の構成要素の特性が不明確であれば機械システム全体の特性を求めることは不可能である。

図 3-1 は工作機械構造の概念を示しているが、一般に機械構造は、

1. 機械要素または構造部材
2. 機械要素または構造部材を接合する種々の結合部

に大きく分類できる。このうち 1. の機械要素または構造部材の特性は、その形状が比較的単純な場合は問題ないが、複雑な形状をした部材の剛性の評価には不明確な所が残されている。一方 2. の種々の結合部の特性は、理論的な解析だけから求めることは多くの場合不可

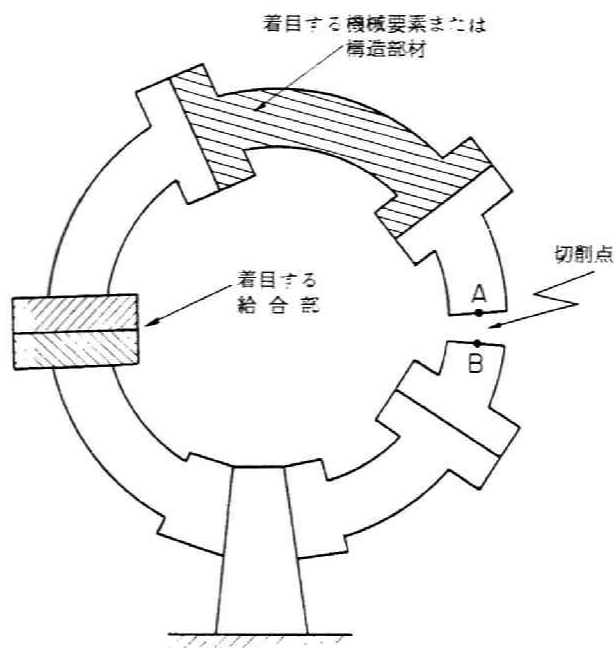


図 3-1 工作機械構造の概念図

能であり、各々の結合部において実験および計算機シミュレーション等により接触結合面間の挙動を物理的な意味が明確な解析手法により把握しなければならない。

今、図 3-1 に示すようなある着目する要素または部材および結合部の特性を正確に解析し評価するためには、機械構造全体に対する実験および計算機シミュレーションだけでその部分の特性を明らかにすることはほとんどの場合不可能であり、これからは機械システム全体の解析に結びつく汎用性のある結果を導くことはできない。そこで、他の要素または部材に依存する影響を取り除くために、その着目する部分だけを取り出し単純化したモデルに対する実験および計算機シミュレーションを行う必要がある。要素または部材の解析と結合部の解析は、機械システムの構成要素の解析という点で、両者は同じ立脚点に立った解析を行わなければならない、次の点についての配慮が重要である。

- (A) 実験または計算により着目する箇所の特性を正確に取り出せ、それを汎用性のある形に評価できること。
- (B) 実験および計算により得られた結果が実験または計算をおこなった状態にだけしか言えないということはないか。つまりそれより得られた結果が機械システム全体の特性を解析する場合に汎用性のある形で結びつくものであること。

もし、(A)と(B)の2点を見逃した実験および計算を行っても、それより得られた結果は役に立たないばかりではなく、設計その他に適用しようとする場合、混乱を引起すもととなる危険性をもつ。本章の研究では、第1章第2節に述べた解析の原理に基づき、以上考察した事項についての配慮を払った解析を次の順序で述べる。

本章第2節に単純化モデルを用いて機械構造物の代表的な結合部であるボル

ト結合部，溶接結合部および案内面の動的剛性と減衰能の解析を行う。第3節では，実際の機械における動的剛性および減衰能の解析として円筒研削盤のホイールヘッド部の解析と，駆動中のテーブル案内面の結合部の剛性と減衰能の測定法およびその適用例を述べる。また第4節では構造部材の剛性の評価法について述べる。以上の本章の解析は，第Ⅲ章における解析をより正確にし，第Ⅳ章の最適設計および第Ⅴ章の実動状態の解析をより有効なものにするためのものであるが，本章の解析を進める上で，実験とともに第Ⅲ章の電子計算機プログラムによる解析法が理論解析の手段として大きな偉力を発揮する。

第 2 節 単純化モデルによる種々の結合部の動的剛性 および減衰能の解析

3. 2. 1 緒 言

この研究は、機械構造物の代表的な結合部であるボルト結合部、溶接結合部および案内面の振動挙動としての剛性および減衰能を解析し、その定性的な特性と定量的な値を得ようとするものである。

現在までに、この目的に対しボルト結合部の剛性³⁻¹⁾および減衰特性^{3-2), 3-8), 3-4), 3-5)}、溶接結合部の減衰特性^{3-6), 3-7)}および案内面の振動特性^{3-8), 3-9), 3-10)}について色々と研究が行なわれ、多くの報告があるが、実際の設計に応用できる段階には至っていないと考えられる。そこで、同じ目的の研究を始めるに先立ち、この研究の困難さが何に原因しており、また問題点はどこにあるのかを以下に考察する。

- (1) 減衰能は、着目している構造が、振動中に外部から加えられたエネルギーを何らかの形で消散する機能であり、この減衰を発生させる要素は構造物中の多くの個所に種々の形で存在する。したがって目的とする結合部の減衰能を実験で求める場合、測定された減衰の値には、実験モデルの支持系や、モデルの材料そのものの内部減衰など、結合部以外で生じた減衰が含まれると考えられる。ゆえに減衰能の測定値は実験モデル全体のみかけの特性値であり、結合部のみの動特性を評価するには、他の部分の影響を除いてやらねばならない。
- (2) 機械システムが振動すると結合部には種々の振動力が加わるが、作用する振動力の加わり方は同一の機械であってもその時の振動モードによって異なる。結合部結合面間に作用する相対力のパターンとしては図 3-2 に示すように X, Y, Z の各軸方向の垂直力およびせん断力、各軸まわりの回転方向の曲げモーメント力あるいはねじりモーメント力等があり、これらの力が単独に、あるいは合さって作用する。しかし、今着目している機械システムが

ある1つの振動数において共振状態にある時、そのうちのいずれかの力が支配的に作用すると考えられる。また一般的に言って、減衰機構とは注目している部分がマクロにでもミクロにでもとにかく何らかの形で運動する事によって生じるエネルギーの消散を言うのであるから、結合部に支配的に作用する力のパターンが

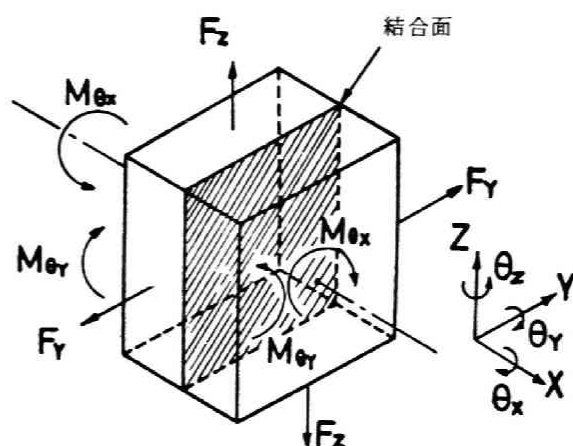


図3-2 結合部に作用する振動内部力のパターン

異なれば、同じ結合部でもその減衰特性が当然変わると考えられる。

- (3) 結合部に同じパターンの力が加わるとしても、その大きさにより減衰能が異なり、明確なしかも無視し得ない非線形性を示すと思われる。
- (4) 接触結合面間の減衰を問題とする場合、当然接触面間の介在物、接触表面状態も結合面間の動的剛性および減衰能に影響を及ぼすが、これらの種々の因子を確定的なものと不確定なものに明確に区別することが必要である。もし接触表面でのミクロな凹凸の分布その他の定量できない部分における不確定的な因子の相違が全体の結果に影響するとすれば、それに依存する結果の変動範囲をつかむことが必要となる。
- (5) 減衰能の測定値は実験モデル全体のみかけの特性値であり、一般論を得るためにまた計算機シミュレーションに適用しうるデータを得るには、結合部自身の定量的な値を求める手法を開発することが必要である。

以上の考察のうち(1)は、どれだけの範囲を振動システムとみなすかが明確な実験モデルが必要とされるということである。次に(2)作用力のパターン、(3)非線形性、(4)量的不確定性の各項はいずれもみかけの減衰の値として混在して現われるか、これらを明確に区別し、解析を行う上で最も優位なパラメータは何

であるかを決定しなければならない。すでに述べたように、機械構造の振動特性としての挙動は、機械構造全体のバランスによって決定され、機械システムがどのようなモード形で振動するかなどの振動特性としての巨視的な特性には、接触表面でのミクロな部分における不確定な因子が大きな影響をもつことはないと考えられる。したがって、最も優位なパラメータは当然(2)の結合部に加わる力のパターンであり、その次が(3)の非線形特性である。そして(4)のうちの不確定な因子とみられるものは最も最後に評価すべきである。もし、(2)をまったく無視して不確定な因子に依存する影響を論じて、(2)のパラメータが異なればまったく異った結果となり、それより得られた結果は意味を成さず混乱を増すのみである。したがって妥当と考えられる解析の順序は図3-3に示すごとくであり、左端に示す結合部での状態（接触結合面モデルでは接触結合面間の介在物、面圧、および確定的な接触表面状態等）を設定したのち、図のような流れに従うことが必要である。

以上の解析を実行するには、その結合部にどのような力がどれだけ加わっているかを知らなければならない。このことは実験による測定だけから求めることは非常に困難であり、第Ⅱ章の電子計算機プログラムのシミュレーションにより振動内部力を並行して計算する必要がある。また種々のパラメータによる影響を正しく実験により評価するには、迅速な測定法よりは、精度よく測定することに留意しなければならない。

これまで述べてきたことは機械構造物の結合部における動的剛性および減衰能の解析原理であり、本研究は、これらの原理に基づき、次のような新しい方

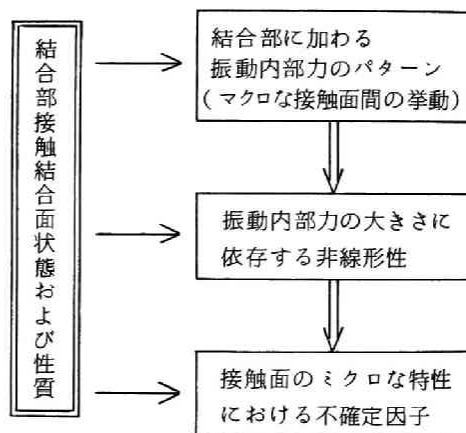


図3-3 結合部の振動特性解析の手順

法で行った。

- (A) 実験モデルを等価に空中に浮いているフリーフリーモデルとし、モデルの支持系から来る減衰能を極小（理論的には0）にする。
- (B) 加振器とその支持から来る減衰もロードセルを間にはさむことによって測定結果に介入しないようにする。
- (C) 減衰比を求めるに周波数応答をベクトル線図上に描き、精度よく測定することに注意する。
- (D) 共振状態で実験を行い、小さな加振力で結合部に大きな振動内部力を生ぜしめる。
- (E) 電子計算機シミュレーションを実験と並行して行い、実験モデルの結合部に加わる力の種類分けとその大きさを求める。
- (F) 接触結合面自身の定量的な値を求める手法を開発する。

以下この手法に基づいたボルト結合部、溶接結合部および案内面の振動特性の解析について述べる。

3.2.2 実験の原理と実験モデルおよび実験方法

(I) 実験の原理

実験モデルとして細長いはり状の構造を有し、中央部に着目する結合部をもつものを考える。このはり構造のモデルを両端自由の境界条件のもとで1次および2次の共振振動数で正弦波加振した状態を、電子計算機プログラムによってシミュレーションすると、図3-4において実線で示すような振動モード形が得られる。モード次数が増えるに従い、振動振幅が0となる節点（nodal point）の数が増える。実験モデルをモード形の節点において支持してやれば完全な両端自由の加振状態が実現でき、支持部に帰因する減衰特性への影響を理論的に0にする事が可能であり、振動システムの範囲を明確にすることができる。さらに図3-4を見ればわかるように、結合部に相当する実験モデルの中央において、1次の共振状態ではそこに加わる曲げモーメント力 M （一点鉤

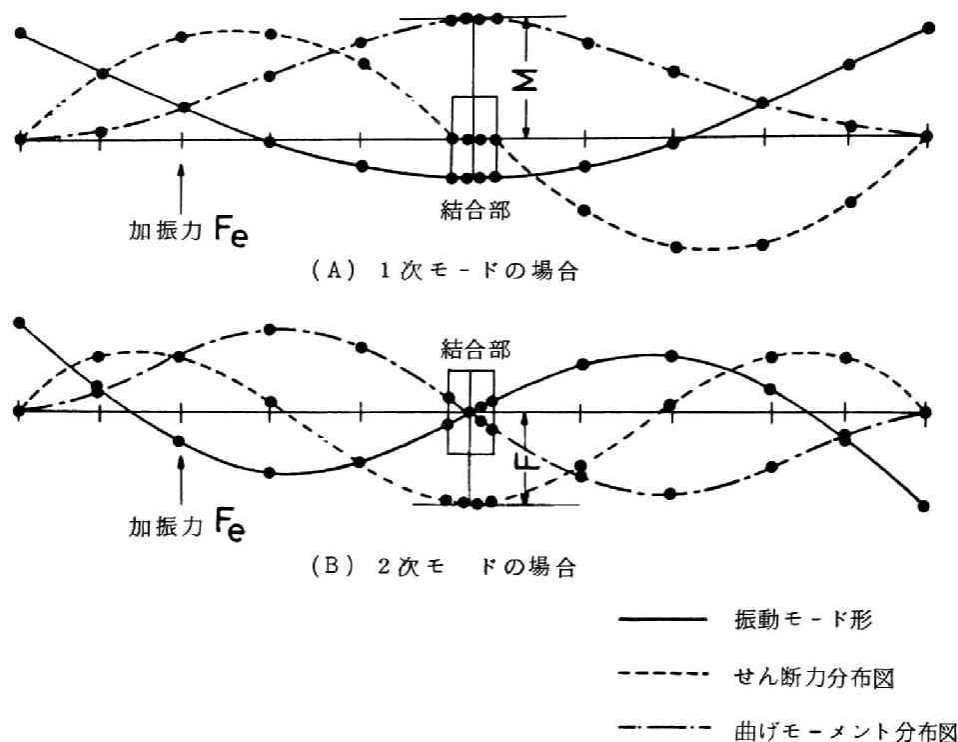


図3-4 実験モデルのモード形，せん断力および曲げモーメントの分布図
(ボルト結合部モデルの場合の計算結果)

線で図示)が最大となり，その時せん断力 F (点線で図示)は0となる。また2次の共振状態では，逆に結合部に作用するせん断力 F が最大となり，曲げモーメント M は0となる。これを結合部のみに着目した場合，図3-5に示すボルト結合部を例にとると，結合部には1次モードにおいて曲げモーメント M のみが，2次モードではせん断力 F のみがそれぞれ独立に作用している事になる。したがって結合部の減衰能というものを接触二面間の相対運動と対応させて考える場合，相対運動を生

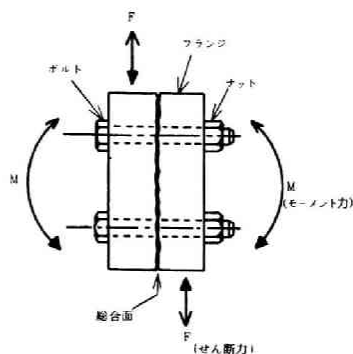


図3-5 結合面に作用する力

せしめる力として1次では曲げモーメントのみを、2次ではせん断力のみを考慮すればよいわけで、それぞれの運動（あるいは結合面間に作用する振動内部力）に対する減衰特性が別個に評価解析できる。また、実際の機械の結合部の振動モード形（振動内部力）を調べる事によって、ここで得られた単純化モデルの解析結果を実際の機械の設計に適用する事が可能となる。

以上の実験原理に基づき、全体としてははり構造でその中央部に結合部を持つモデルを、研究の対象としているボルト結合部、溶接結合部および案内面のそれぞれについて作成した。

(iii) 実験モデルの説明

ボルト結合部、溶接結合部および案内面の各実験モデルは本節(i)で述べた実験の原理に基づきそして次の(iii)に述べる同じ実験方法により測定を行う。ここでこれらの実験モデルの形状等の説明をまとめて以下に行う

(a) ボルト結合部モデル

ボルト結合部の減衰能を測定するための実験モデルを図3-6に示す。また、結合部付近の写真を図3-7に示す。モデルの材質はねずみ鉄で、フランジ部とビーム部より成っている。ビーム部は断面の寸法が75 mm × 25 mm、長さ

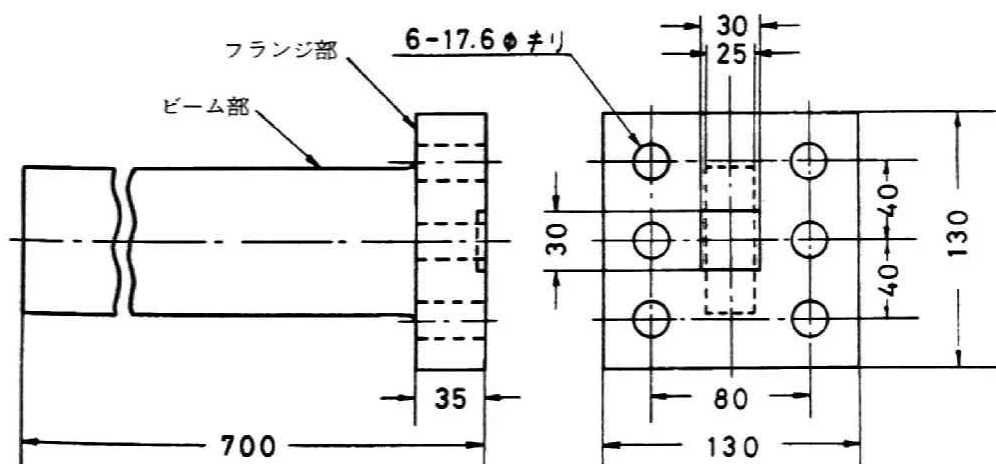


図3-6 ボルト結合部モデルの形状

が 665 mm ，フランジ部は接触面の寸法が $130\text{ mm} \times 130\text{ mm}$ ，厚さが 35 mm でビーム部とフランジ部は一体構造である。そしてフランジ部には 17.6ϕ のばか穴をあけてあり，そこにボルトを通すことによりフランジ部を接触部として図 3-6 のモデル 2 つを結合したものを 1 つの実験モデルとした。ばか穴は 6 つもうけてあり，締め付けボルトの本数を適宜変えられる様にしてあるが，実験は 4 本の場合のみ行なわれている。

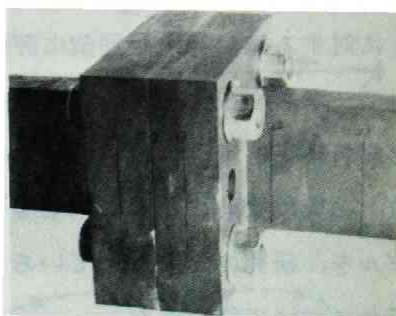
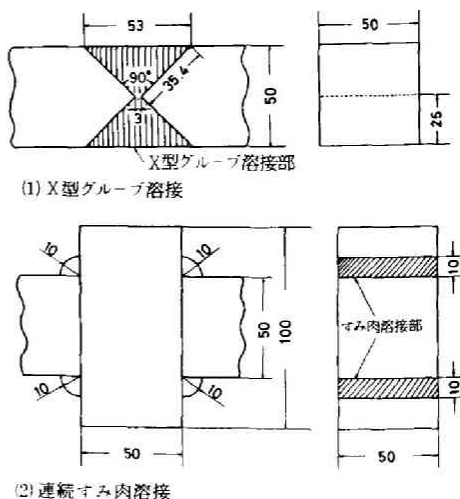


図 3-7 ボルト結合部付近の写真

またフランジ部の接触面は，2 面ができるだけ広い範囲で接触する様に，中央部を $30\text{ mm} \times 30\text{ mm}$ だけ削りとってある。この接触面は研削仕上げをほどこしてあり，結合のために使用したボルトは M 12 および M 16 の軟鋼六角ボルトである。

(b) 溶接結合部モデル

溶接結合部モデルは材質が S 45 C で $50\text{ mm} \times 50\text{ mm}$ の正方形断面を持つ長さが 700 mm の 2 本の角棒を溶接によって結合し全長を 1400 mm とした。溶接方法は電気溶接で，溶接棒としては神戸製鋼製の B-10 軟鋼一般用のものを使用した。また溶接仕様は図 3-8 に示す様に X 型グループ溶接と連続すみ肉溶接の 2 種類のモデルを用いた。X 型グループ溶接は開先深さ 25 mm ，開先角度 90° ，そしてルート間隔を 3 mm とした。また連続すみ肉溶接モデルはビームとビームの間にビームと同じ材質のブロックをはさみこみ，その 4



(2) 連続すみ肉溶接

図 3-8 溶接結合部モデルの溶接仕様

すみに連続すみ肉溶接を施したものである。さらにこれらのモデルは溶接後残留応力を除去するため焼鈍（630℃で4時間半加熱した後冷却）を行った。

(C) 案内面モデル

案内面は機械の種類、同じ機械においても案内面が用いられる場所、ベッドとテーブルの材料の組合せ、接面面の形状（フラット、 Γ 、逆 Γ 等）および案内の方法（すべり、静圧、ローラ等）等により多くの種類があるが、ここでは案内面の動的剛性および減衰能をそれぞれの場合について調べるのが目的ではなく、案内面のベッドとテーブル間の相対振動運動による振動特性を案内面を極度に単純化した実験モデルを用いて正確に測定し、その解析をする事を目的としている。そこでベッドとして断面が65mm×25mm、長さが1100mmの一樣断面のねずみ鋳鉄製のビームを用い、テーブルとしては断面が65mm×70mm、長さが200mmのS50Cの中実のブロックを使用した。接面面に相当する部分は、ビーム、ブロックとも研削仕上げを施している。そしてこのブロックをビームの中央に乗せたものを図3-9に示すように案内面モデルとした。この案内面モデルは実際の案内面とはかなり異なった簡単な構造ではあるが、減衰の発生機構を把握するには、このような単純化されたモデルである必要がある。またこのモデルにおけるベッド、テーブル間の運動と、実際の機械の案内面での両者間の運動を対応させて考えれば、

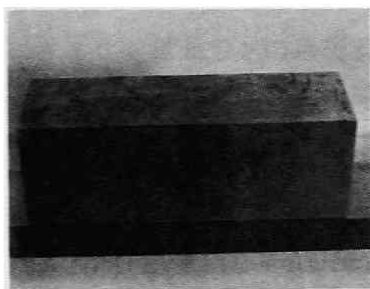


図3-9 案内面モデル写真

このモデルにおける減衰特性を実際の機械に適用できる。

(D) 実験方法

図3-10はボルト結合部モデルの実験モデル系を示しているが、ボルト結合部、溶接結合部および案内面の各モデルともフリーフリー状態において各モデルの共振モードでの加振実験を行うために、各共振振動状態におけるモード形の節点すなわち動的に振動振幅が0の点を支点とし、直径1.2mmの軟鋼線で

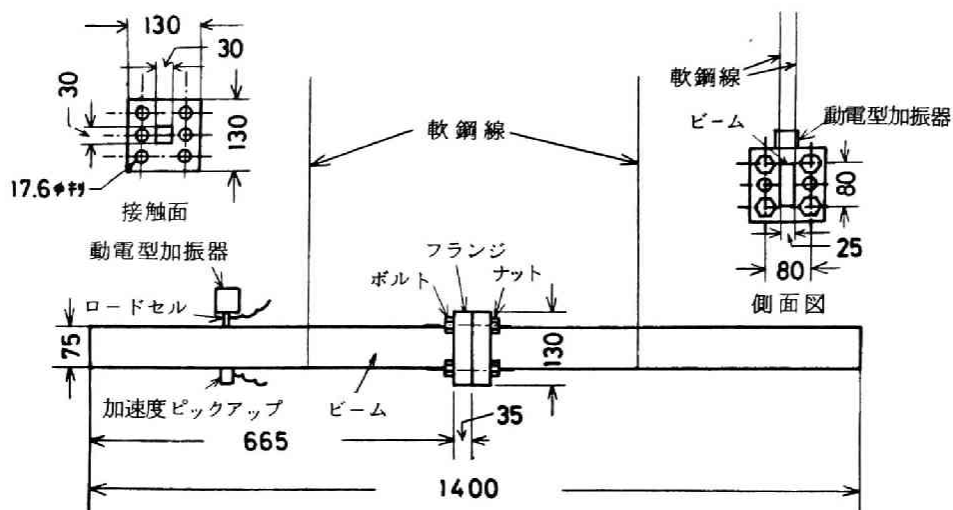


図 3-10 ボルト結合部を含むフリーフリー梁状の実験モデルの概略図

空中に吊り下げ、加振力測定用のロードセルを介してビーム上に接着した小型動電型加振器（重量は 1.3 kg）によって正弦波加振実験を行なった。この実験では節点の決定は重要であるので、いずれの場合もモード計を用いて厳密に求めている。またビーム上に加速度トランスデューサを同様に接着し、変位を求めている。この測定系のブロック線図を図 3-11 に示す。モデルを加振することによって得られた加振力と加速度の信号を増幅した後、TFA (Transfer Function Analyzer) に入力しリセプタンスを求め、加振振動数とリセプタンスの間の周波数応答をプロットする。これよりモデル系の共振振動数を求め、各共振モードでのモード形を測定する。

この各共振振動数付近の周波数応答よりこの共振モードのモデル系全体の等価減衰比をバンド幅法で求めるわけであるが、この実験では、精度よく減衰比を求めるために次の様な方法で行なった。まず実験モデルの共振モード付近で加振振動数を細かく変え、その都度ロードセルおよび加速度ピックアップより得られた加振力および加速度変位のそれぞれの計器の出力値をデジタルボルトメータで直接読み取り、それよりリセプタンスを計算した。また加振力およ

び加速度変位の両信号ともシンクロスコープにモニタし、その波形が正弦波であることをチェックした。また同時に両信号の位相差を位相差計から読み取り、リセプタンスと合わせてベクトル線図に表わした。1つのベクトル線図を描くには、加振力を一定に保持して測定した。得られたベクトル線図は、この共振モード付近において1自由

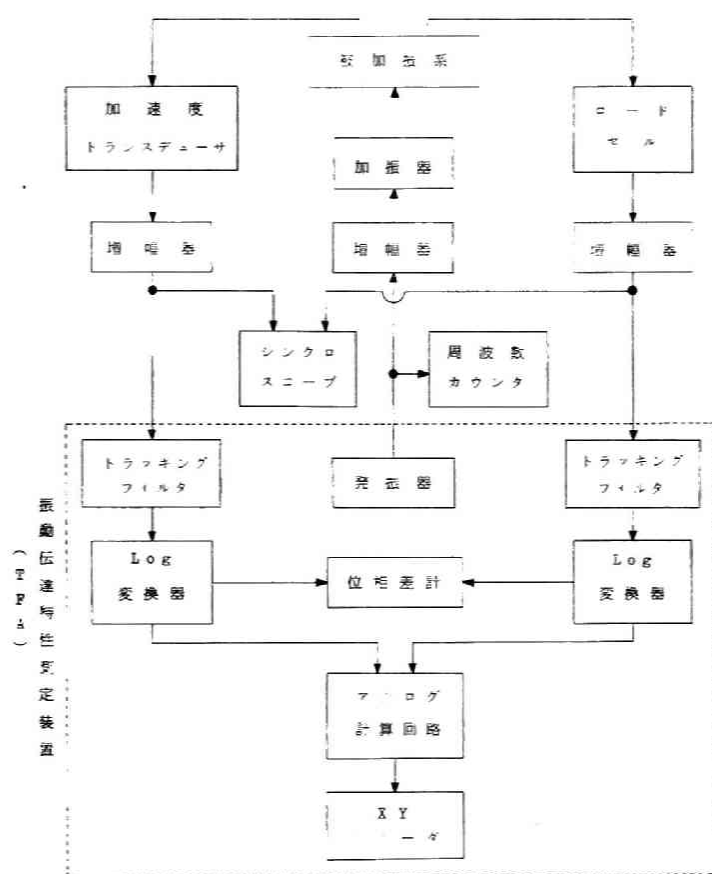


図 3-11 測定系のブロック線図

度系とみなせる場合にはほぼ円上にプロットされることより、逆に測定結果の精度をチェックすることができる。このベクトル線図からバンド幅法を用いて実験系の等価減衰比を求めた。本研究では、パラメータを変える実験毎に得られたデータをベクトル線図上に表わし、測定の精度を常にチェックしている。

3.2.3 ボルト結合部モデルの解析

(i) 序 論

ボルト結合部は、機械構造物内において多くの個所で部分構造を組み合わせて

所定の構造を得るのに用いられる。また他の結合法に比べると組立および解体が容易であり、特殊な技術も要さないので便利である。しかし動特性上この個所がどのような影響をもつかはいまだ十分に解明されていない。

既に述べたように結合部の剛性および減衰特性の解析においては、まずその部分に作用する振動内部力のパターンと大きさを考えなければならない。このうち力のパターンを支配するのはモデル系の振動モードであり、その力の大きさを支配するのは実験モデルに加える加振力の大きさである。さらに加振力の大きさと結合面間の挙動の関係は、ボルトの締め付け力によって支配されると考えられる。そこで実験のパラメータとして、モデル系のモード次数、加振力、およびボルトの締め付け力の3つを選んだ。ボルトの締め付けは、接触面を四塩化炭素で清浄にした後トルクレンチで行ったが、実際の締め付け力は、ボルトに箔歪ゲージをはり、そこから検出される歪量からボルトが受ける張力を計算することにより求めた。

(ii) 実験モデルの計算機シミュレーションと結合部間の相対変位の解析

ボルト結合部実験モデルの振動特性を第1章第3節に述べた動剛性合成法電子計算機プログラムシステムを用いてシミュレーションするために、図3-12にそのモデル化を示すようにビーム部とフランジ部をはり要素で、そして結合部を各座標軸方向の並列の等価ばね剛性 k のばねと等価ヒステレティック減衰係数 h のダンパーでモデル化し、ビーム部とフランジ部の材料内部減衰はヒステレティック減衰として実験より得られた材料内部減衰比を用いて計算した。

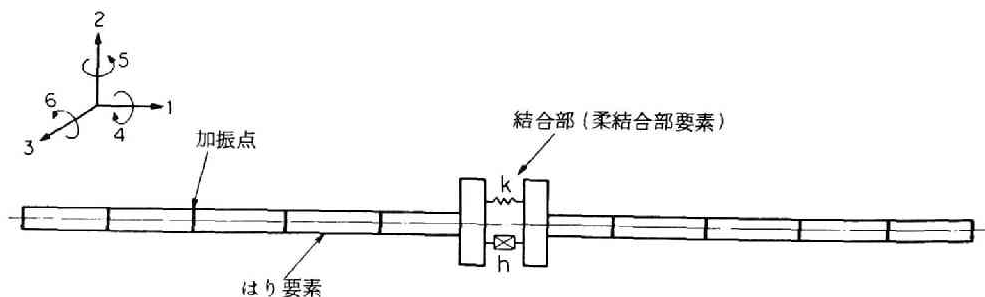


図3-12 ボルト結合部モデルの計算機シミュレーションのためのモデル化

まず、1次および2次の共振状態での振動モード形、せん断力の大きさ、そして曲げモーメントの大きさを計算し、その分布状態を示したものがさきほどの図3-4である。これを見るとわかる様に、1次の共振モードの場合はモデル中央の結合部においてせん断力は破線で示す様に0となり、曲げモーメントは一点鎖線で示す様に最大となる。一方、2次の共振モードでは、結合部において逆に曲げモーメントが0、せん断力が最大となる。

次に結合部だけに着目してみると、図3-13の(2)、(3)に示す様に、1次モードでは相対曲げモー

メント M のみが、2次モードでは相対せん断力 F のみがそれぞれ独立に作用していると考えられる。したがって

結合面の挙動を考える

際、作用する力として

1次では曲げモーメントのみを、2次ではせん断力 F のみを考えればよいわけで、挙動の

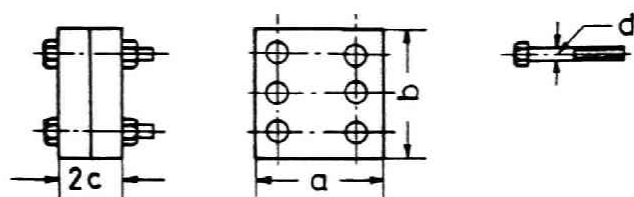
解析が容易になると同時に、それぞれの作用

力に対する減衰能を求めておけば、実際の機

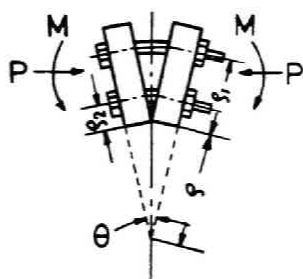
械のボルト結合部の共振振動モードを調べる事によりその部分での減衰能を予

知する事が可能となる。

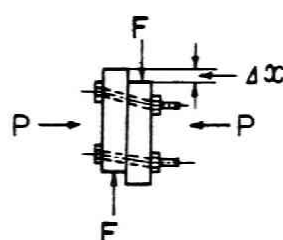
結合部に作用する振動力と結合部接触面間の相対変位より減衰の発生を理論的に考察する場合、結合力（あるいは面圧）とあわせて接触表面におけるミク



(1) 実験モデルのフランジ部およびボルトの寸法



(2) 曲げモーメントのみが加わる場合(1次モード)



(3) せん断力のみが加わる場合(2次モード)

図3-13 結合部に作用する相対力と相対変位の説明図

口な凹凸を問題にしななければならないが、ここでは上記の考えに基づき、結合部に曲げモーメントおよびせん断力がそれぞれ独立に作用した時の結合面間の相対変位の間の関係の材料力学的な解析を以下に示す。

図 3-13 の(1)に示すように結合部のフランジの断面の寸法を a , b , 幅を c , 締付けボルトの直径を d とし, 4 本のボルトにより P なる力で締付けられているとする。また, この解析ではフランジ部は弾性変形しないものと考えている。

(I) 曲げモーメントのみが作用する場合

図 3-13 の(2)に示す様に, 曲げモーメント M が作用し結合部が相対的に θ ($\ll 1$) だけ開いたとする。この時, ボルトに引張り力と曲げモーメントが同時に作用すると考えられる。そこで上の 2 本のボルトが受ける引張り力を P_1 , 曲げモーメントを M_1 , そして下の 2 本のボルトが受ける引張り力を P_2 , 曲げモーメントを M_2 とする。ところが曲げモーメント M が作用しない状態で 4 本のボルトはそれぞれ $P/4$ の引張り力を受けているから, ボルトが受ける引張り力と伸びの関係は, 上の 2 本のボルトでは

$$\frac{P_1 - \frac{P}{4}}{\frac{\pi}{4} d^2} = E \frac{\rho_1 \theta}{2 C} \quad (3-1)$$

下の 2 本のボルトでは

$$\frac{P_2 - \frac{P}{4}}{\frac{\pi}{4} d^2} = E \frac{\rho_2 \theta}{2 C} \quad (3-2)$$

となる。ここで ρ_1 および ρ_2 はフランジ下端より上のボルトおよび下のボルトの中心線までの長さを, そして E はボルトの縦弾性係数である。また, 結合部が相対的に θ だけ開いたときの開きの中心(曲率中心)からフランジ下端までの長さを ρ ($\gg \rho_1, \rho_2$) として曲げモーメントとたわみの曲率との関係より, 上と下のボルトについて

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{EI}{\rho_1 + \rho} \\ M_2 &= \frac{EI}{\rho_2 + \rho} \end{aligned} \right\} \quad (3-3)$$

が得られる。Iはボルトの断面2次モーメントで、今の場合 $I = \pi d^4 / 64$ である。ここで $\rho_1, \rho_2 \ll \rho$ である事を考えれば(3-3)式は

$$M_1 = M_2 = \frac{EI}{\rho}, \quad (\rho \simeq \frac{2C}{\theta}) \quad (3-4)$$

で近似できる。結合部に作用する曲げモーメントMは、結局これらの力の和で与えられるから

$$M = 2 P_1 \rho_1 + 2 P_2 \rho_2 + 2 M_1 + 2 M_2 \quad (3-5)$$

となり、この式に(3-1)式、(3-2)式および(3-4)式を代入して開き角 θ について計算すると、 θ と結合部に作用する曲げモーメントMの間には、

$$\theta = \frac{4C}{\pi d^2 E} \left\{ \frac{1}{(\rho_1^2 + \rho_2^2) + \frac{d^2}{8}} \right\} \left\{ M - \frac{P}{2}(\rho_1 + \rho_2) \right\} \quad (3-6)$$

の関係が成立する。(3-6)式が示すように結合面間に作用する曲げモーメントMが $P(\rho_1 + \rho_2)/2$ より大きくなければ、面間の全体的な開き角は0である。

(II) せん断力のみが作用する場合

図3-13の(3)に示す様に、結合部接触面間にせん断力Fが作用し相対的に Δx だけ変位したとする。接触面の等価摩擦係数を μ とすると、接触面間にせん断力Fが作用した時接触面に生じる摩擦力Ffは、

$$F_f = \mu P \quad (3-7)$$

である。また4本のボルトに作用するせん断力の和 F' は

$$F' = F - F_f \quad (3-8)$$

となるから、1本のボルトに作用するせん断応力 τ は、

$$\tau = \frac{F'}{4} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{4} d^2} = \frac{F - \mu P}{\pi d^2} \quad (3-9)$$

で与えられる。ここでボルトの横弾性係数を G とすればボルトのせん断ひずみ

$$\gamma \text{ は } \gamma = \frac{\Delta x}{2C} \quad (3-10)$$

であり、 $\tau = G\gamma$ であるから(3-9)式と(3-10)式より

$$\frac{F - \mu P}{\pi d^2} = \frac{G \Delta x}{2C} \quad (3-11)$$

となり、結合面間の相対変位 Δx と結合面間に加わるせん断力 F の間には、

$$\Delta x = \frac{2C(F - \mu P)}{\pi G d^2} \quad (3-12)$$

の関係が成り立つ。これよりせん断力 F が μP より大きくなければ、面間に全体的な相対すべり変位は生じないことがわかる。

(3-6)式および(3-12)式は、接触表面でのミクロな凹凸の変形を考慮していないため厳密な解析ではないが、一応の目安を与えられ考える。

(III) 実験結果と考察

ボルトの締付け力が1100 kgの状態を得られた加振実験における周波数応答を示すボード線図を図3-14に示す。これによると1次の共振振動数は150 Hz、2次は449 Hzである。次にこの共振振動数付近のモデル系の応答をベクトル線図に書き表わした一例を図3-15に示す。○印が1次の共振モードの場合で締付け力が1100 kg、加振力が0.3 kg(加振力は1回の測定中一定に保つ)の場合であり、●印が2次の共振モードの場合で締付け力1480 kg、加振力0.3 kgの場合である。この図を見ればわかる様に、系の応答のベクトル軌跡が正円を描いており、共振振動数付近においてモデル系を充分によい近似で1自由度系と見なすことができると同時に、本実験の測定精度が高いこ

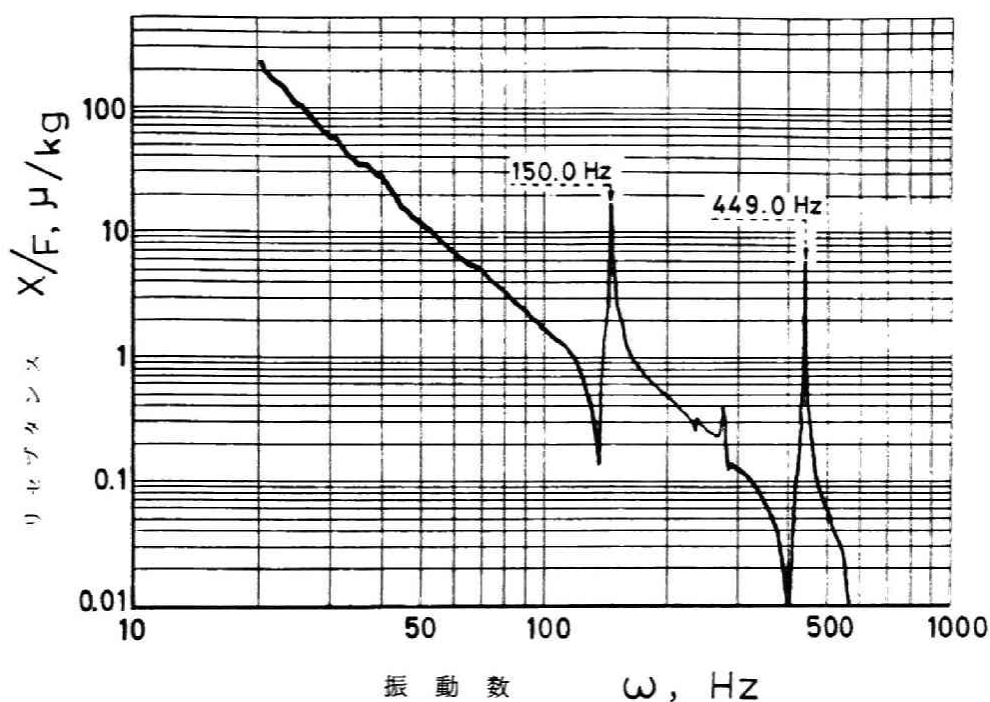


図3-14 ボルト結合部モデルの周波数応答の一例

とがわかる。このベクトル線図からバンド幅法を用いて計算される等価減衰比 ζ は、1次の場合で0.00409、2次の場合で0.000633である。

まず最初に締付け力を1100 kgと一定にし、加振力を0.06 kgから1.2 kg（両振幅）まで変化させた時の系の等価減衰比 ζ の値を図3-16に示す。○印はボルト結合部を有するモデルの1次モード、●印が2次モード、◎印は比較のために実験された結合部を持たない一体構造物モデルの1次モード、●印がその2次モードにおける等価減衰比 ζ の測定値である。この図でボルト結合部モデルと一体構造物モデルの等価減衰比の測定結果を比較してみると、1次モードにおいては減衰比の値に明確な差が認められ、ボルト結合部において大きな消散エネルギーを発生していると考えられる。しかし2次のモードの場合そ

の差が認められない。これは、2次モードでは結合部に減衰を発生させるほどにはマクロなあるいは結合表面におけるミクロな相対変位が生じておらず、したがって結合面の有無にかかわらず材料内部減衰とはほぼ同じ値の減衰能が測定されていると考えられる。結合部間の相対変位の解析における(3-6)式および(3-12)式は、以上の

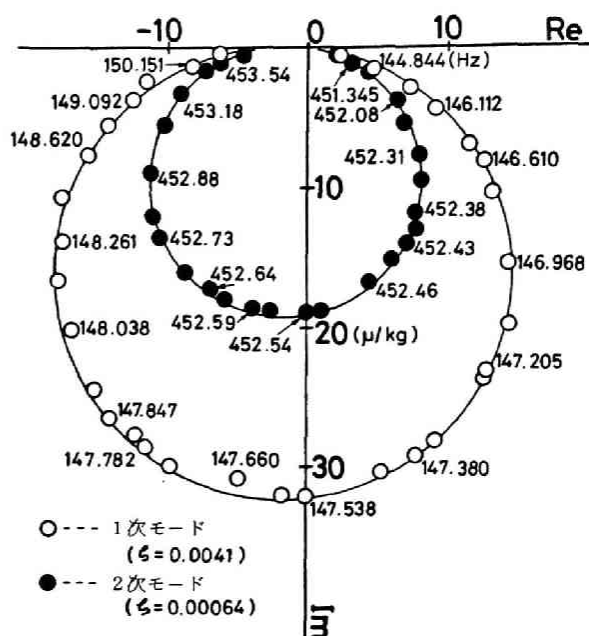


図3-15 ボルト結合部モデルのベクトル線図の一例

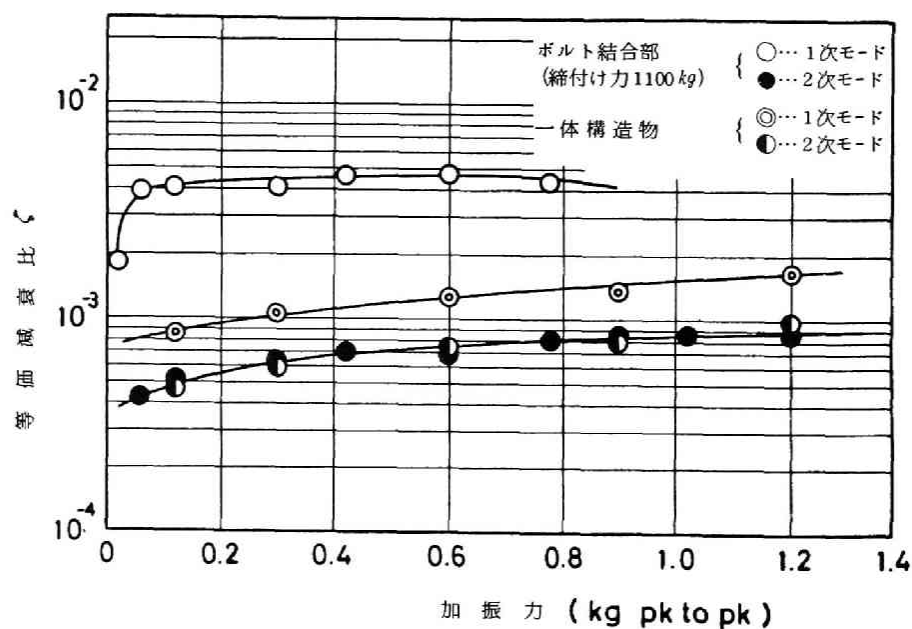


図3-16 加振力と等価減衰比の関係の実験結果

実験結果の大局的なうらづけを示していると考えられる。(3-6)式および(3-12)式に $\rho_1 = 105 \text{ mm}$, $\rho_2 = 25 \text{ mm}$ を代入し、締め付け力 P を 1000 kg とすると、1次モードにおいて接触面間が全体的に離れるに $6500 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ 以上のモーメント力が結合面間に加わる必要がある事がわかる。振動内部力のシミュレーションの結果、加振力が片振幅で 1 kg である場合、結合部に $7426 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ のモーメント力が加わる。また実験における加振力では面間が全体的に離れる事がない場合でも、接触表面の凹凸において減衰を発生しうる微少な動きが存在すると考えられる。一方、2次モードでは、結合面等価摩擦係数 μ を仮に 0.5 として(3-12)式に代入すれば、相対的に結合面間が全体的にすべるに、 500 kg 以上のせん断力が必要である。計算機シミュレーションの結果加振力が片振幅で 1 kg の場合、接触面間に 120 kg のせん断力が加わる事がわかる。したがって結合面に加わる力が相対変位を生じさせる力に比して大幅に小さく、有意な減衰を発生する微少すべりも生じていない事が推察しうる。

次に加振力の変化に対する等価減衰比の変化をみると、一体構造物モデルの1次、2次およびボルト結合部モデルの2次モードについては、加振力が大きくなるにつれて減衰比がやや大きくなっており、加振力に対する材料内部減衰の非線形性を示している。一方ボルト結合部の1次モードの場合は先ほどの解析結果からもわかる様に結合部が相対変位をおこしやすく、小さい加振力ですでに減衰を発生するための有意な相対変位を生じていると考えられる。そのため、それ以上加振力を大きくしても減衰比の大きさに差がみられていない。

次に加振力を 0.3 kg と一定にしておき、ボルトの締め付け力を 350 kg から 3100 kg まで変化させて締め付け力が減衰比の大きさにおよぼす影響を調べたものが図3-17である。ここで○印が1次モード、●印が2次モードの場合で、比較のため同じ大きさの加振力で実験した一体構造物モデルの減衰比を破線で示している。1次モードの場合、ボルトの締め付け力を大きくしてゆき、結合部が相対的に運動しにくくなるにつれて減衰比の値が小さくなり、次第に一体構造物の減衰比に近づいてゆくが、2次モードの場合では締め付け力を変えて

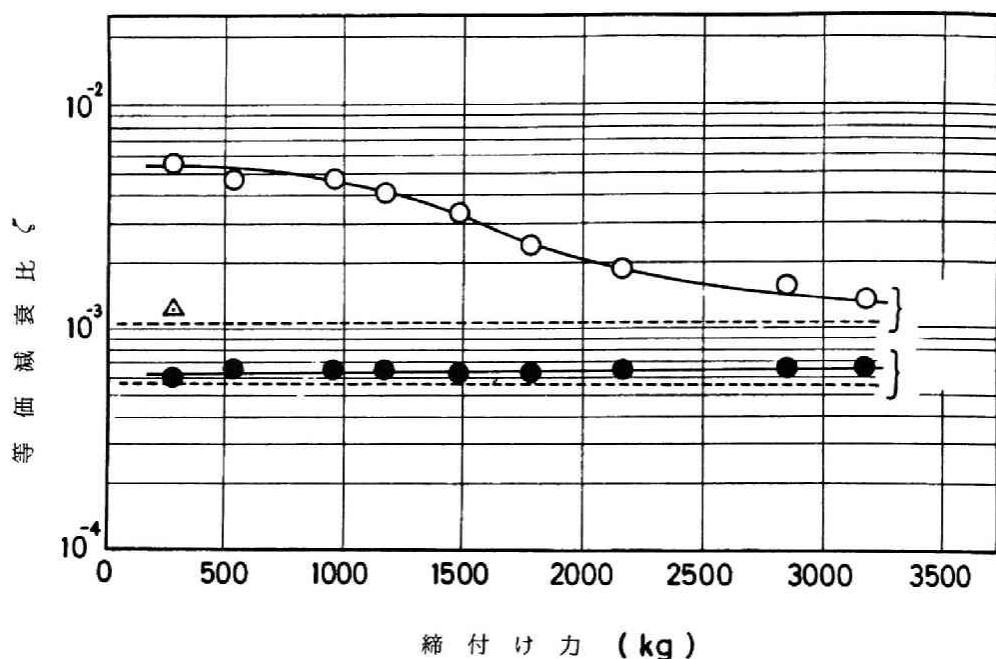


図 3-17 ボルト結合部モデルの等価減衰比に及ぼす締付け力の影響の
実験結果 (加振力 0.3 kg pk to pk)
破線は一体構造の値を示す

もほとんど変化がみられず、ほぼ一体構造物と同じ減衰比の値しか測定されなかった。そこで 2 次モードにおいて締付け力を 270 kg と小さくし、かつ加振力を 2.2 kg と大きくして測定したところ、 Δ 印で示す減衰比の値が測定された。この様に結合部に働く振動力の加わり方およびその大きさが減衰能におよぼす影響を調べたわけであるが、ここでは振動力の加わり方の違いによる差が顕著であり、同じ結合部においても作用する力の加わり方によってその減衰能を別個に評価する必要がある、あらためて理解される。

次に結合面に油を塗って同様の加振実験を行なった結果を示す。本章 3.2.5 節において説明する案内面モデルの減衰能の測定結果からもわかるが、一般に接触部に油膜が存在する場合には、その粘性減衰作用のために油膜のない場合に比べると大きな減衰が生じるとされている。そこで、今の実験モデルの結合

面にマシン油（＃120）を塗り（ボルト頭とフランジ部およびナットとフランジ部の接触面には油を塗っていない）、締付け力をパラメータとして1次の共振振動モードにおける減衰比の値を測定した結果を図3-18に示す。ここで加振力は0.18

kgで一定とした。この結果を図3-17における一体構造物モデルの減衰比と比較してみると、マシン油を塗った結合部の減衰比がほぼ材料内部減衰と同じ値になっていること

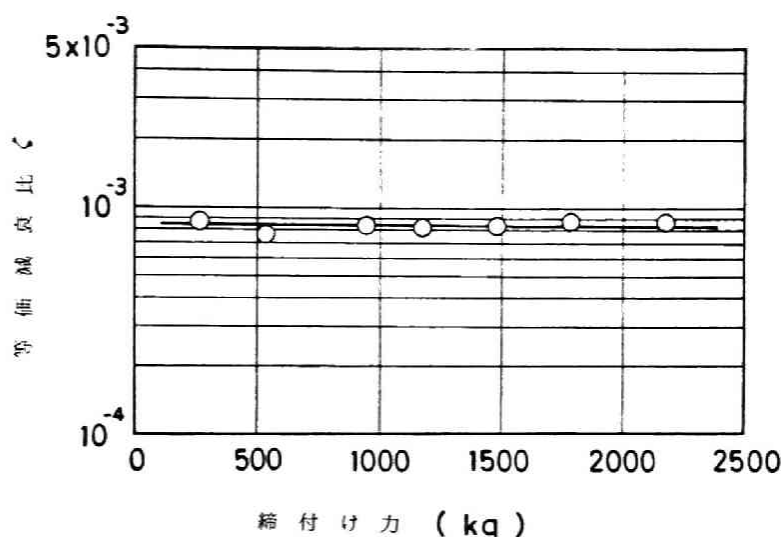


図3-18 結合部にマシン油を塗った時の締付け力と1次モードの等価減衰比の実験結果
(加振力0.18kg pk to pk)

がわかる。つまりボルト結合部の様に強制的に結合面が締付けられて、案内面などに比べてはるかに高い接触面圧を有する場合には、油膜の粘性によって減衰が生じるということではなく、かえって油の存在が局所的な金属の凝着を防ぐ作用をしており、金属接触による減衰の発生をさまたげているものと考えられる。またこの結果が示すもう1つの重要な点は、油を塗らない状態での減衰能の測定値は、ボルト頭とフランジ部およびナットとフランジ部の接触に起因する減衰を無視できるということである。すなわち1次モードでみられた一体構造物との減衰能の差は、接触結合面自身での減衰の発生によるものであることが確かめられた。

(Ⅳ) 接触結合部等価ばね剛性および等価減衰係数の計算

(a) 計算方法

電子計算機プログラムによるシミュレーションと実験データとをあわせて結合部の特性値を決定する方法を図 3-19 にしたがって説明する。まず、各要素の部材としてのデータを読み込んだ後、結合部のばね剛性として任意の初期値を入れる。この時、減衰係数としては 0 を入れておく。ここで結合部の等価減衰係数としては、結合部でのエネルギー消散が接触面間の相対運動速度に比例するのではなく変位量に比例するものと考えヒステレティック減衰係数を仮定した。そして共振振動数を計算し、それが実験で求めた共振振動数に一致する様にばね剛性の値を変化させてゆく。このモデルでは結合面がはり状モデルの中心軸に対して垂直な平面内にあり、しかも 1 次の共振モードでは結合部に曲げモーメント力のみが、2 次の共振モードの場合にはせん断力のみがそれぞれ独立に作用することがわかっているので、結合面での 6 個のばね剛性のうち 1 次モードでは図 3-12 における座標の 6 方向のみ、2 次モー

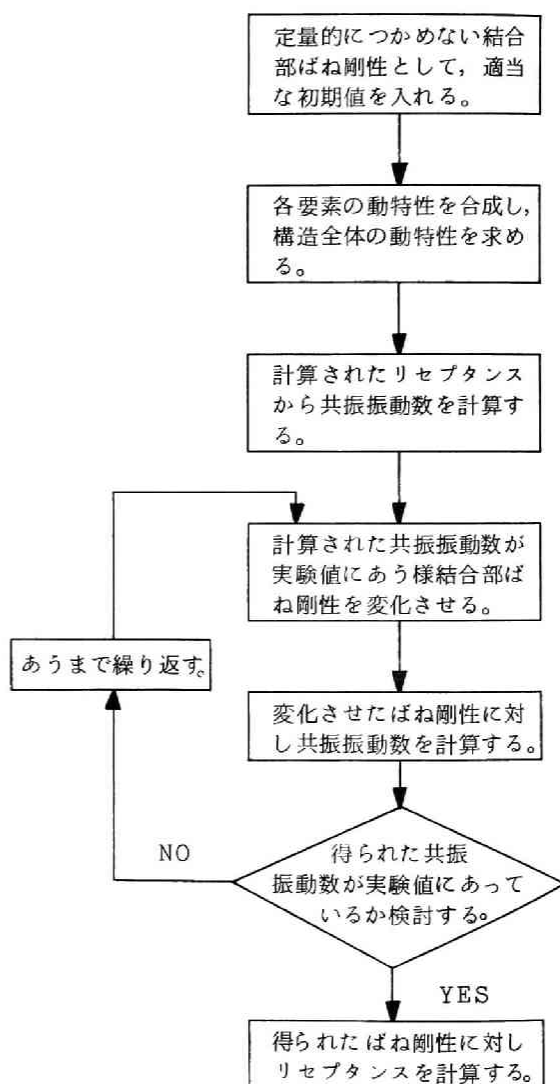


図 3-19 結合部等価ばね剛性を決定するための流れ図

ドでは2方向のみのばね剛性のみがこれらの固有モードでは関与する。したがって各共振モードの1個のばね剛性のみに着目し、その値を変化させればよい。また、減衰能がモデル系の共振振動数に及ぼす影響は無視できることより、まず結合部の等価ばね剛性を求め、その後減衰係数を定める方法は妥当である。

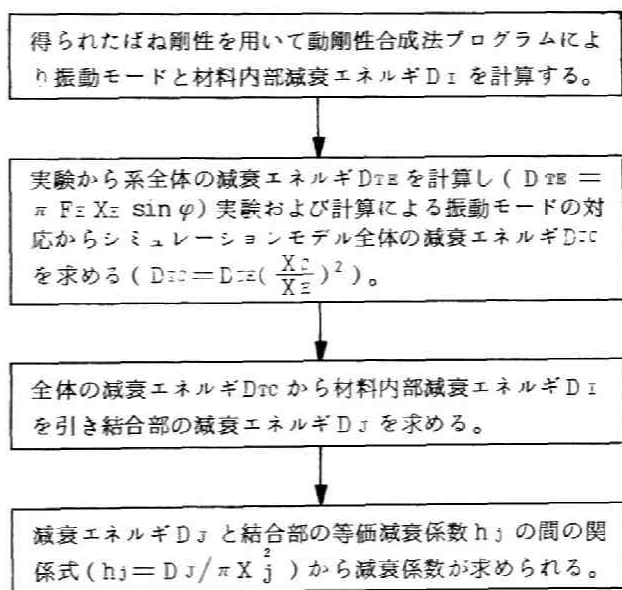
こうして結合部の特性値のうち、まず等価ばね剛性が決定された。そこで次に、結合部の等価減衰係数を求めるわけであるが、その手順を図3-20に示す。先ほど決定されたばね

剛性を用いて計算される共振振動数に対し、モデル系の振動モード、振動内部力およびエネルギー分布を計算する。この計算において、材料内部減衰比は、結合部を持たない一体構造物モデルから得られた実験値を用いる。この計算により加振点変位 X_c での材料内部減衰エネルギー D_I を求める。

一方、実験においてその変位状態において実験モデル全体が1サイクル当りに消散する減

衰エネルギー D_{TE} は材料内部減衰エネルギーと結合部減衰エネルギーの和であり、それは次式で計算される。

$$D_{TE} = \pi F_E X_E \sin \varphi \quad (3-13)$$



F_E : 共振時の加振力 X_c : 計算による加振点変位
 X_E : 共振時の加振点変位 X_j : 計算で求める結合部の
 φ : 加振力と変位の位相差 相対変位

図3-20 計算機シミュレーションを用いた結合部等価減衰係数の推定法

ここで F_E は共振時の加振力、 X_E は共振時の加振点変位および φ は加振力と変位の位相差のそれぞれの実験値である。

さて、ここで注意しなければならないのは、材料内部減衰エネルギー D_I が計算機シミュレーションから求めたものであるのに対し、 D_{TE} は実験結果から得られたものであるということである。したがって両者の差から結合部のみの減衰エネルギーを求めるには、実験より得られたモデル系全体の減衰エネルギー D_{TE} の値を計算機シミュレーションのものに変換する必要がある。計算機シミュレーションモデル全体の減衰エネルギー D_{TC} と実験モデル全体の減衰エネルギー D_{TE} の間には、計算および実験による共振時の加振点変位をそれぞれ X_C および X_E とすると、

$$D_{TC} = D_{TE} \left(\frac{X_C}{X_E} \right)^2 \quad (3-14)$$

の関係があり、シミュレーションモデル全体の減衰エネルギー D_{TC} が計算される。そこで D_{TC} から D_I を引く事によって結合部のみの減衰エネルギー D_J が求まる。結合部の減衰エネルギー D_J と結合部に仮定した等価ヒステレティック減衰係数 h_J との間には、 X_J をシミュレーションモデルで計算される結合面間の相対変位として、

$$h_J = D_J / \pi X_J^2 \quad (3-15)$$

という関係があるので、これより、もう一つの結合部の特性値である等価減衰係数が求まる。

(b) 計算結果

以上述べた計算手法に従い、そして(iii)において得られた実験結果を用いて結合部の等価ばね剛性と等価減衰係数を求めた。1次モードの実験結果からは曲げモーメント方向の、2次モードの実験結果からはせん断力方向のはね剛性および減衰係数が計算されるが、2次モードでは結合部は実験より剛結合とみなせ、結合部固有のデータは求めている。

図3-17で示した実験結果に基づき、接触結合面の曲げモーメント方向の等

価ばね剛性 k_j と等価ヒステレティック減衰係数 h_j の値を、締め付け力をパラメータとして表わしたものが図3-21である。この図から、結合部の等価ばね剛性 k_j と等価ヒステレティック減衰係数 h_j の値はいずれも締め付け力が大きくなるにつれて増大し、 h_j については締め付け力が 1800 kg を越えるとはば一定になることがわかる。

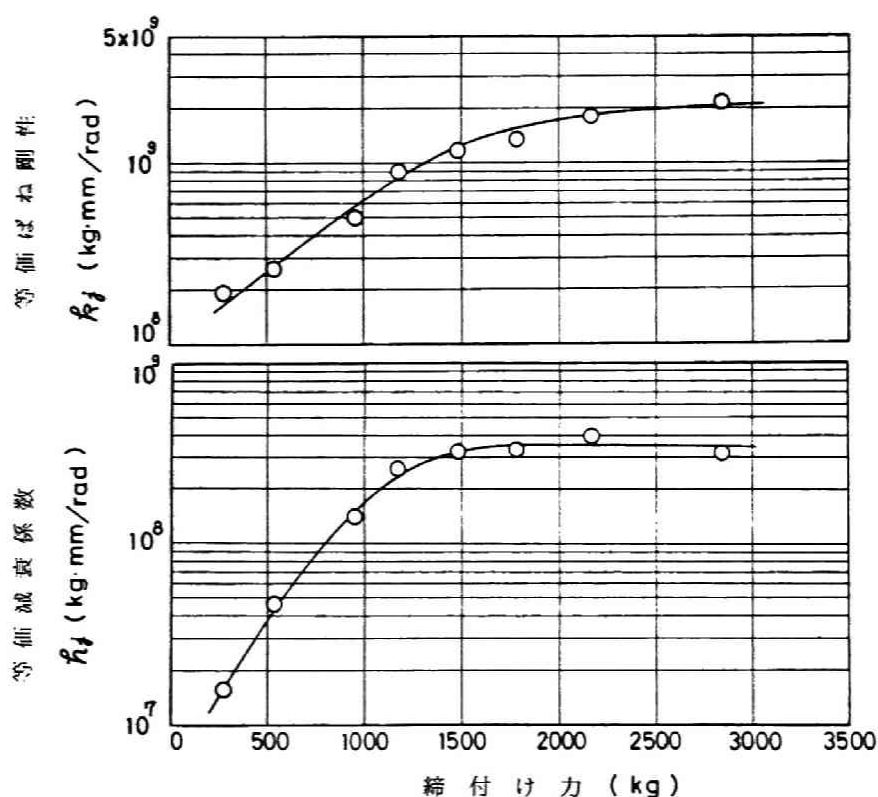


図3-21 結合部締め付け力による結合部モーメント方向等価ばね剛性および等価減衰係数の変化（条件は図3-17と同じ）

(V) ボルト結合部モデルの動的剛性および減衰能についての結論

ボルト結合部を中央に持つ両端自由のはり構造モデルを共振振動状態で加振

する実験と、実験モデルの電子計算機プログラムによるシミュレーションとを組み合わせることにより、ボルト結合部の等価剛性および減衰能を解析し、次の結論を得た。

- (1) 本節において考案した実験モデルおよび実験方法により、ボルト結合部モデルの減衰特性を精度よく測定することができた。また、異なる共振モードで実験を行なうことにより、結合部に作用する力の加わり方（力のパターン）を曲げモーメント力の場合とせん断力の場合に分離できることがわかった。
- (2) ボルト結合部での減衰能を決定する主な要因は、減衰が接触二面間の相対運動と深い関係があることより、結合部に加わる力のパターンとその大きさである。
- (3) 1次共振モードで結合面に油を塗らない場合、その減衰能は大きいですが、接触結合面に油を塗ると一体構造物の減衰能とほぼ同じ値となった。このことは、1次モードで減衰が大きい場合は、接触結合面自身で減衰を生じておりボルト頭とフランジ部、およびナットとフランジ部の接触等による減衰を無視できること、およびボルト結合部の様に強制的に結合面が締め付けられて高い接触面圧を有する場合には、油の存在が接触面における金属同士の凝着を防ぐ作用をし減衰の発生をさまたげているものと考えられる。
- (4) 従来接触結合面に垂直な力が作用する場合は、結合面に平行なせん断力が作用する場合に比べて減衰が生じにくいとされているが、³⁻¹¹⁾ 曲げモーメント力の形で面に垂直方向に力が加わる場合にはかえって減衰が発生しやすく、ボルト結合部の減衰能は曲げモーメント力の大きさとボルトの締め付け力に依存する。
- (5) 一方それに比べて、接触結合面に平行にせん断力が加わる状態では減衰は発生しにくく、結合部剛性の低下も少ない。この事は結合部に加わるせん断力の大きさと相対変位の解析より理解される。
- (6) 実験と実験モデルのシミュレーションを並行して行ない、接触結合部固有の等価ばね剛性および等価減衰係数を求める手法を示した。そしてこれを用

いて測定モデルの接触結合部の特性値を求め、定量的な評価を行った。

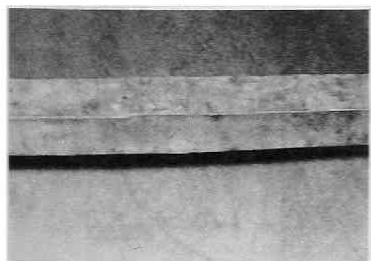
3.2.4 溶接結合部モデル

(i) 序 論

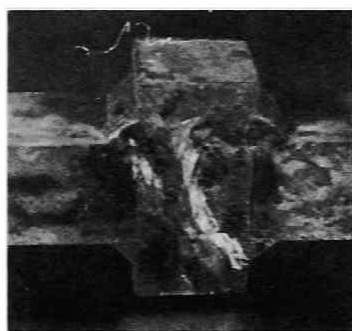
溶接結合部は機械構造物においてボルト結合部と並んで多くみられる結合方法である。最近では溶接技術が進歩している一方において、溶接構造は同一剛性を持たせるのに重量が軽くて済む、リブ、しきり板その他を容易に入れられ合理的な設計を行い易い、そして鋳物は大型の構造物の場合鋳型の製作に手間がかかり、一度作ってしまうと設計変更が容易でなく、さらに鋳物を作る作業条件が悪い等の理由により、これまで鋳物構造であったものが溶接構造にとってかわる傾向にある。この様に構造物中の溶接結合部分が増えてくると、構造物の動特性を知るにはこの溶接結合部の動特性を正確に把握しておくことが必要である。ここでは通常の溶接結合において多くみられるX型グループ溶接と連続すみ肉溶接の実験モデルを作りその特性をボルト結合部モデルの場合と同じ実験方法により測定した。

(ii) 実験結果と考察

本実験に使用したモデルの溶接部の写真を図3-22に示す、このうち(a)が



(a) X型グループ溶接モデル



(b) 連続すみ肉溶接モデル

図3-22 溶接結合部モデルの写真

X型グルーブ溶接モデル、(b)が連続すみ肉溶接モデルである。この場合における各次モードの振動内部力の分布は図3-4に示すボルト結合部における場合と同様の形をしており、1次モードでは結合部にモーメント力が、2次モードではせん断力が加わる。そこで、振動内部力のパターンを支配するパラメータとして、1次および2次の共振モードを選び、また内部力の大きさを支配するパラメータとして加振力を選んだが、その他に図3-22において、モデルを上方から加振する場合（以後A方向と呼ぶ）と、それに垂直な方向（以後B方向と呼ぶ）から加振する場合とでは溶接部の形状に対する振動方向が異なるのでそのために特性も変わり得ると考え、両者の加振実験を行った。

加振点はモデル左端より25 cmと一定にした。またモデルの減衰能は小さいので、小さな加振力に対しても大きな系の応答が得られる様に、変位検出用の加速度トランスデューサーは、各共振モードの最大振動振幅位置にとりつけた。これにより加振実験を行った結果得られた周波数応答の一例を図3-23に示す。この例はX型グルーブ溶接モデルをA方向から加振したものである。1次の共振振動数は134.1 Hz、2次の共振振動数は368.3 Hzである。この周波数応答は図3-14に示したボルト結合部モデルの周波数応答と違って1次モードと2次モードで加速度トランスデューサーのとりつけ位置が図中のXで示すように違うため連続でないが、今目的とする減衰能の測定においては問題はない。

測定により得られたベクトル線図の一例を図3-24に示す。このうち(a)は連続すみ肉溶接モデルを0.1 kgの加振力でA方向から加振した場合の1次モードにおけるベクトル線図を、そして(b)は2次モードの同じ条件の場合である。このとき計算されるこのモデル系の等価減衰比 ζ の値は、1次モードで0.000184、2次モードで0.000336である。ボルト結合部モデルのベクトル線図に比べると若干測定値がばらついてはいるが、共振振動数付近を1自由度系に近似するのには十分な精度である。

次に考慮したパラメータの変化に対する溶接結合部モデルの等価減衰比の測

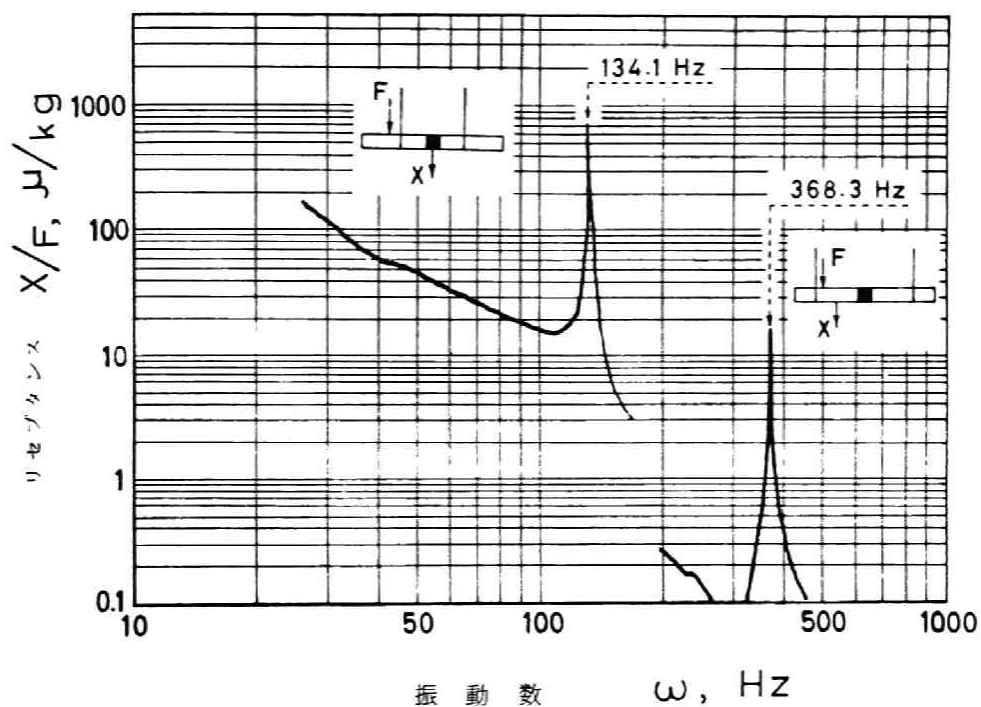


図 3-23 溶接結合部モデルの周波数応答の一例

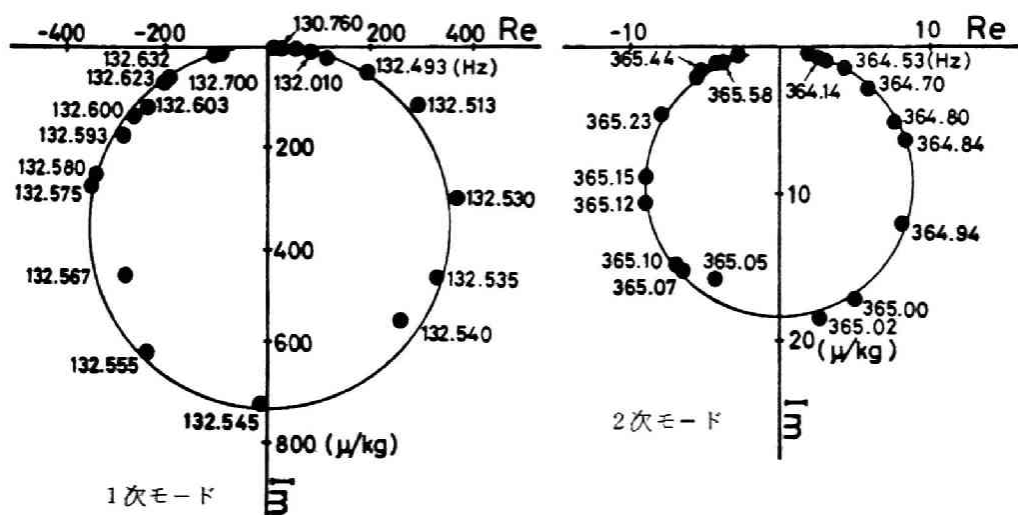


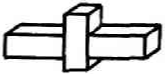



図 3-24 溶接結合部モデルのベクトル線図の一例

定結果を以下に述べる。まず、表 3-1 に実験された各モデルの形状に対する 1 次および 2 次の共振モードでの減衰比の値を示す。加振力はいずれも 0.05 kg (pk to pk) である。これによると、いずれの場合も 1 次モードの減衰比に比べて 2 次モードの減衰比が大きくなっている。また比較のために行った溶接結合部を

表 3-1 各モデルに対する減衰比


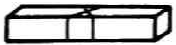
モデル形状	減衰比(1次)	減衰比(2次)
	0.000125	0.000251
	0.000161	0.000259
	0.000171	0.000346
	0.000382	0.000523

持たない一体構造物モデルでは、表 3-1 の一番上に示す X 型グループ溶接モデルを A 方向から加振した場合とほぼ同じ値が得られており、図 3-16 で示したボルト結合部を持たない一体構造物モデルでは 1 次モードの減衰比が 2 次モードより大きいことと全く逆の傾向である。これは、ボルト結合部を持たない一体構造物モデルの材質がねずみ鉄であるのに対し、溶接結合部モデルおよび溶接結合部を持たない一体構造物モデルが S45C の鋼材であり、材質固有の振動特性であると考えられる。また表 3-1 の各モデルにおける減衰比をみると、X 型グループ溶接モデルは連続すみ肉溶接モデルに比べると減衰比の値が小さくなっており一体の構造物の減衰比に近い値をとる。この結果は図 3-8 に示した溶接仕様から説明される。X 型グループ溶接モデルではその中央に 3mm のルート間隔を設けてあり、左右のビームの間に完全に溶材が流れ込んでいるためにビーム同士が接触運動をする事がない。したがってこのモデルは溶接結合といってもほぼ剛結合に近い状態であり、一体構造物モデルに近い減衰比の値をとるものと考えられ、溶材自身が高減衰能をもつことはないと思われる。一方、連続すみ肉溶接モデルでは、溶接が施されているのは四隅だけで、中央のフランジと左右のビームとの接触面間には溶材が入っていない。

この面は研削仕上げをしているが、この接触結合面に作用する力の大きさや方向によってこのフランジ部とビーム部がわずかでも相対運動を起こし得ると考えられ、X型グループ溶接モデルに比べて減衰比の値が大きくなっていると思われる。

次に同じモデルで加振方向を変えた時にみられる減衰特性の相違について調べる。表3-2は、X型グループ溶接モデルをA方向およびB方向から0.05

表3-2 加振方向をかえた時の減衰比の違い

モデル形状	加 振 力 (kg pk to pk)			
	0.05	0.1	0.2	0.3
	0.000125	0.000110	0.000116	0.000114
	0.000161	0.000174	0.000182	0.000216

kg～0.3 kg (pk to pk)までの加振力を加えた時に測定された1次モードの減衰比の値を示している。まず加振力の変化に対する減衰比の変化をみると、表3-2の上を示すA方向加振の場合ではほぼ一定値をとっているが、下のB方向加振のモデルでは、加振力が増加するに伴い減衰比の値も増加している。またいずれの大きさの加振力の場合でも、A方向から加振する場合より、B方向から加振する場合の方が減衰比の値が大きくなっており、同じモデルで結合部に同じ大きさの曲げモーメント力が作用しても、その作用方向によって結合部の減衰特性が異なることがわかる。ここで参考のために、図3-16に示したボルト結合部モデルを締め付け力を1100 kgとして1次の共振振動モードで測定した減衰比の値を表にしたものが、表3-3である。表3-2と表3-3を比較してみると、ボルト結合部モデルに比べて溶接結合部モデルの減衰比の値は1/20ないし1/25の小さな値である事がわかったと同時に、このような小さな値が精度よく測定できることから、本節で用いている減衰能の測定法が

信頼できるものであることがわかる。


最後に共振振動モードが異なった時の減衰比の違いを表 3-4 に示す。

この表は、連続すみ肉溶接モデルを A 方向から 1 次および 2 次の共振モードにおいて、 $0.05\text{ kg} \sim 0.2\text{ kg}$

表 3-3 ボルト結合部モデルの減衰比

加振力 (kg pk to pk)			
0.06	0.1	0.3	0.4
0.00392	0.00405	0.00409	0.00465

表 3-4 振動モードの違いによる減衰比の違い

モデル形状	共振モード	加振力 (kg pk to pk)		
		0.05	0.1	0.2
	1 次	0.000171	0.000181	0.000209
	2 次	0.000346	0.000336	0.000312

(pk to pk) の加振力で加振した結果を表わしたものである。この場合も表 3-2 の結果と同じく、いずれの加振力に対しても、1 次より 2 次の方が減衰比の値が大きくなっている。また加振力が大きくなるにつれて、減衰比の値が 1 次の場合には少し小さくなり、2 次の場合には逆に少し大きくなっているが、いずれも有意な差とはいえず、ほぼ一定値をとっているとみなすことができる。

(iii) 溶接結合部モデルの減衰能についての結論

以上の実験結果から次の結論を得た。

- (1) 従来減衰が高いと言われているような溶接結合部において、実際に減衰が生じているのは主に溶接されていない部分での接触面間の相対運動によるものと思われ、純粋に溶材のみで結合された他に接触部をもたない溶接結合部では、測定された減衰比の値は非常に小さく、溶接結合部を持たない一体構造物モデルの値とはほぼ同じである。
- (2) 本実験では、ボルト結合部モデルの場合の $1/20$ ないし $1/25$ の非常に小さい減衰比が精度よく測定されており、これはモデルの支持系および加振器系等に帰因する減衰の影響が無視できるということであり、本節に用いている

減衰能の実験方法は非常に信頼できるものであることを実証している。

- (3) 鋼材の材料内部減衰比は、3.2.3節に示した鋳物の材料内部減衰比の1/6ないし1/7程度である。

3.2.5 案内面モデル

(i) 序 論

案内面は種々多様なものに分類され、その接触面間の動的挙動は非常に複雑である。また、実際の機械の各種案内面の動特性の研究も数多く行なわれているが、その結果は繁雑であり、統一のある結論を得ることは非常に困難である。そこで本研究では、それらの案内面の接触面間の挙動と振動特性との関係を案内面を単純化した実験モデルを用いて解明することを目的とする。そしてこの単純なモデルでの解析結果を積み上げていくことにより、種々多様な案内面の振動挙動を統一的に解明することができると考える。ここでは、まず、案内面に相当する接触面間の相対運動と振動特性の関係、また面間に油膜が存在する場合油膜の挙動が振動特性に及ぼす影響を実験モデルによる測定と計算機シミュレーションにより調べた。ただしこの実験では、すべり案内面を対象としている。

(ii) 測定モデルの形状と実験方法

案内面の場合にも、接触2面間の①真実接触面積、②真実接触面圧、③真実接触位置、がその結合面に作用する振動力とは別にその減衰能を支配する主な因子と考えられる。この3つの因子のうち、①の真実接触面積と②の真実接触面圧については、それぞれみかけの面積、面圧である程度の評価が期待できるが、③の真実接触位置（あるいは真実接触点の個数）については、実際の接触面におけるその存在確率が全くランダムであり、それを人為的に設定するのはほとんど不可能であると言ってよい。そこで本実験では、案内面モデル固有のパラメータとして、みかけの接触面積とみかけの接触面圧を選んだが、この2つのパラメータは、テーブルに相当するブロックの重量が一定であるから相互

に関連をもつことになる。

まず、みかけの接触面積の相違の影響をみるために、図 3-25 に示す様にブロックのベッドに相当

するビームとの接触面に、その長辺に平行に溝を切り、溝を切らないブロックに比べてみかけの接触面積が $1/2$ 、 $1/5$ および $1/10$ となる様な 3 種類のブロックを製作した。

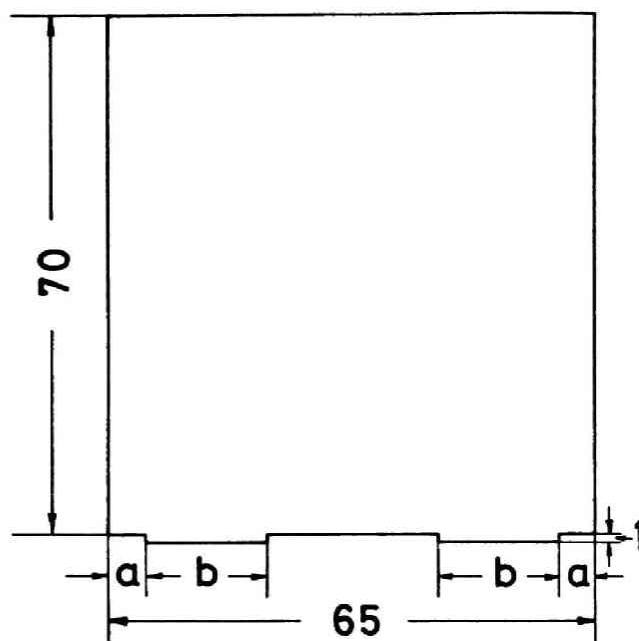
ただしこの場合、残す山の数はいずれも 2 本である。このブロックの重量は 7.14 kg そして溝を切らないブロックの接触面積は 130 cm^2 であることより、平均接触面圧は

接触面積が $1/2$ 、 $1/5$ および $1/10$ のブロックにおいてそれぞれ 0.1099 kg/cm^2 、 0.2748 kg/cm^2 および 0.5495 kg/cm^2 で

ある。

$1/2$ の

また同じみかけの接触面積、面圧を持っていても、接触面間に油膜が存在する場合にはそれが連続的な油膜であるか、いくつ



面積	a (mm)	b (mm)
$1/2$	5.0	16.25
$1/5$	12.0	6.5
$1/10$	12.0	3.25

図 3-25 ブロックモデルの断面図 (I)

が

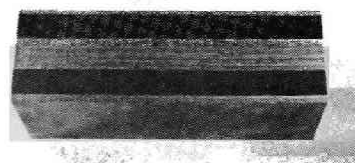


図 3-26 ブロックの一例 (I)

かの部分に分割されているかによって、接触面間の油膜の挙動が異なり、減衰特性に影響を及ぼすと考えられる。そこでみかけの接触面積を溝を切らないものの1/2と一定にして、図3-27の様に接触面に残す山の数が、先程の2本の場合の他に4

本、8本のブ

ックを製作した。その一例として図3-28に山の本数が8本の場合のモデルの写真を示す。

以上の案内面モデルの接触面での形状と各場合の平均接触面圧を溝を切らないモデルも含めてまとめ表3-5に示す。モデルの種類は全部で6種類であり、表3-5に示すモデル番号を付け、以後各モデルをこの番号で呼ぶ。

この6種類のテーブルに相当するブロックおよびベッドに相当するビームの接触面は、研削仕上げを行った。この面の粗さの測定値は $R_{\max} \cong 2 \mu$ であった。また、この案内面モデルの場合にも、ボルト結合部モデルや溶接結合部モ

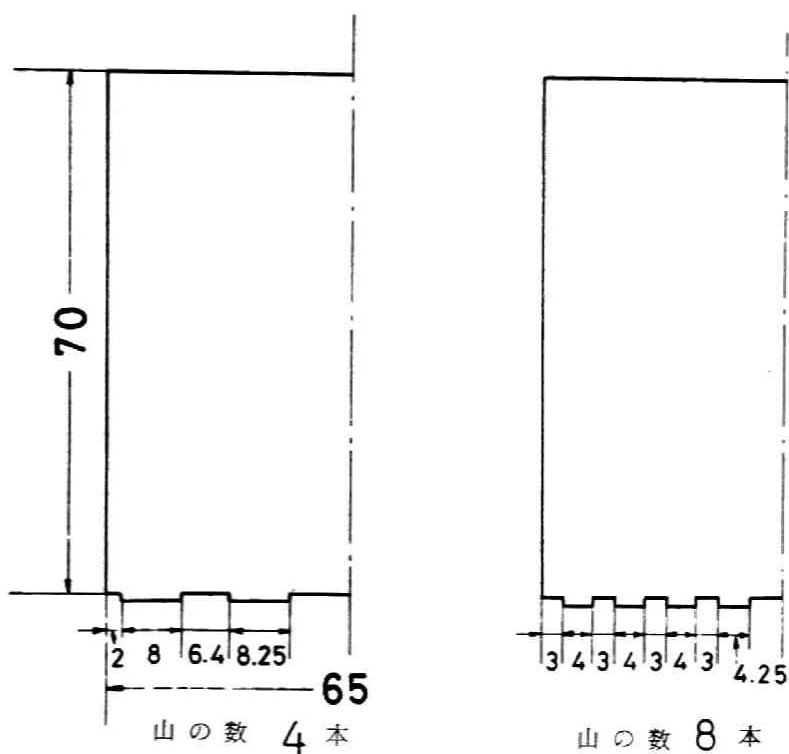


図3-27 ブロックモデルの断面図

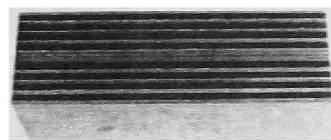


図3-28 ブロックの一例(Ⅱ)

デルと同じく、接触面に作用する力のパターンと大きさを支配するパラメータとして共振振動モードと加振力を選んだ。

またすべり案内面でも、静圧案内面に比べて量は少ないけれども、ベッドとテーブルの間には油膜がある。しかし静圧案内面の様に強制的に油膜を形成させるの

ではないので、実際の油膜厚さを測定するのは大変困難である。したがって本実験では、ブロックの接触面に一様にゆきわたらせる事ができる程度の量のマシン油#120（面積に応じて0.05cc～0.2cc）を塗布した。みかけの接触面積が同じモデルでは油量が同じになる様に、注射器を用いて塗布している。

(iii) 案内面モデルの計算機シミュレーション

本研究でとりあげている3種類のモデルのうち、ボルト結合部および溶接結合部モデルの結合部接触面が、はり状構造のモデルの中心軸に垂直な面内に存在するのに対し、案内面モデルの場合は図3-29に示すように接触面がビームの中心軸と平行であり、広い面積にわたって接触している。したがって案内結合部を一組のばねとダンパー（ばねおよびダンパーは、X、Y、Z軸方向と各軸まわりの回転とあわせ6つの方向のものを1組としている）

表3-5 案内面モデル番号と形状および平均接触面圧

モデル番号	みかけの接触面積 (溝のないモデルを) 1とする	山の数	平均接触面圧 kg/cm ²
1	1	—	0.05495
2	1/2	2	0.1099
3	1/5	2	0.2748
4	1/10	2	0.5495
5	1/2	4	0.1099
6	1/2	8	0.1099

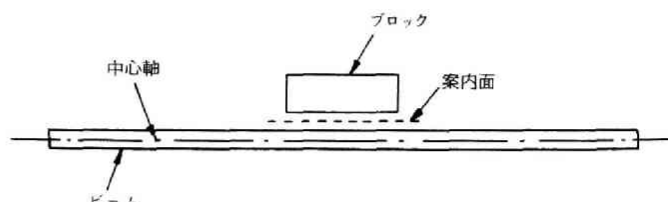


図3-29 案内面モデルの概念図

でモデル化する場合には、その挙動を正確にシミュレーションすることができない。ここでは、図 3-30 に表わすように案内面を 2 組のばねとダンパーで

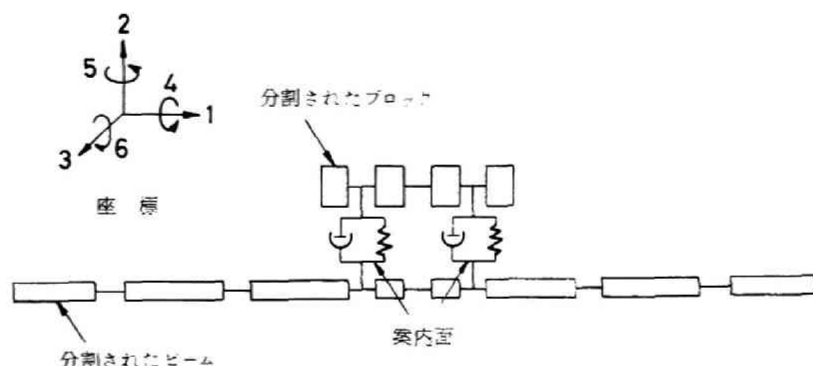


図 3-30 案内面モデルのシミュレーション図

モデル化した。他の部材は、ボルト結合部モデルと同様は要素でモデル化し、また接触面では下のビームおよび上のブロックよりそれぞれ無質量完全剛体はり伸ばしその 2 つの先端をばねとダンパーの並列要素でモデル化した。

この案内面モデルの接触部の特性値を決定する場合、ボルト結合部の時と違って複数組のばねとダンパーの値を、実験結果と対応させて求めなければならない。ここでは、最適化問題に用いられるシンプレックス法³⁻¹²⁾（この手法は第Ⅱ章第 3 節の最適設計においても使用される）を応用し、複数組のばねの最適な組み合わせを求めた。

シンプレックス法とは、シンプレックス (simplex) と呼ばれる幾何学図形を基にするもので、これは「 n 次元空間の $(n+1)$ 個の点の集合はシンプレックスを形成する」と定義されており、例えば、2次元問題でのシンプレックスは図 3-31 に示すように三角形、三次元問題でのシンプレックスは四面体を形成する。今、 n 個のパラメータを持つある評価関数について最適値を求める最適化問題の場合、初期値に対して n 個のパラメータを 1 つずつある割合だけ変化させたものを考えると、初期値と合せて $n+1$ 個のパラメータの組 (n 次

元空間では
($n+1$) 個
の点) がで
きる。それ
ぞれの組に
ついて評価
関数 (今の
場合共振振
動数) を計

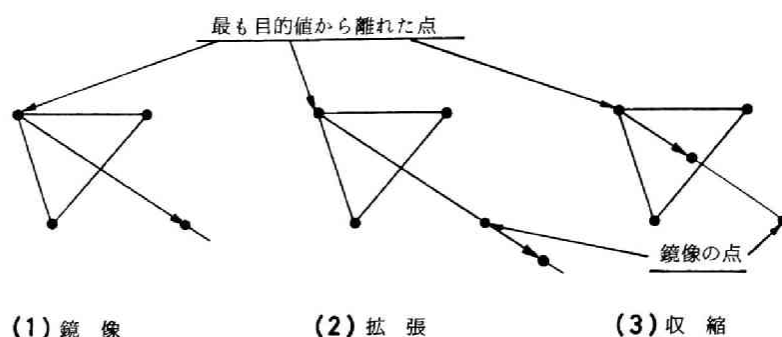


図 3-31 シンプレックス法での各操作の説明図
(2 次元問題の例)

算し、最適値 (今の場合実験より求まる共振振動数) から最もかけ離れた点を見つける。そうすると、他の n 個の点が張る超平面に対するこの点の鏡像 (reflection) 点における評価関数の値は最適値に近づくと期待される。ここで評価関数として、計算による共振振動数と実験値との差の絶対値をとれば、評価関数を最小にする問題になる。一般には鏡像の操作だけでは収束性が悪いので、図 3-31 に示す様に鏡像をとった方向に拡張 (expansion) するか収縮 (contraction) するかの手続きを行ない、新たに評価関数をより小さくするパラメータの組合せを持つシンプレックスを求めて、前ステップで一番大きな評価関数値を持つシンプレックスとおきかえる事により、次のステップへ進む。この手続きを評価関数がある値以下になるまで繰返し、最適なばねの組合せを求める。

このようにして得られた接触結合面の等価ばねを用いて計算機シミュレーションより得られた各次固有モードのモード形を図 3-32 に示す。このうち(a)が共振振動数が 9 3.6 Hz の 1 次モード、(b)が共振振動数 2 2 6.3 Hz の 2 次モードの振動モード形であり、●印が静止時の位置で、○印が振動変位を示しており、この○印の点は振動の半周期毎に各●印の位置に対して対称な位置へと往復運動をする。1 次モードでは、ブロックは静止時の位置をほぼ保ったままで、ビームが曲げ運動を行っており、また 1 方向にはほとんど動かない事がわか

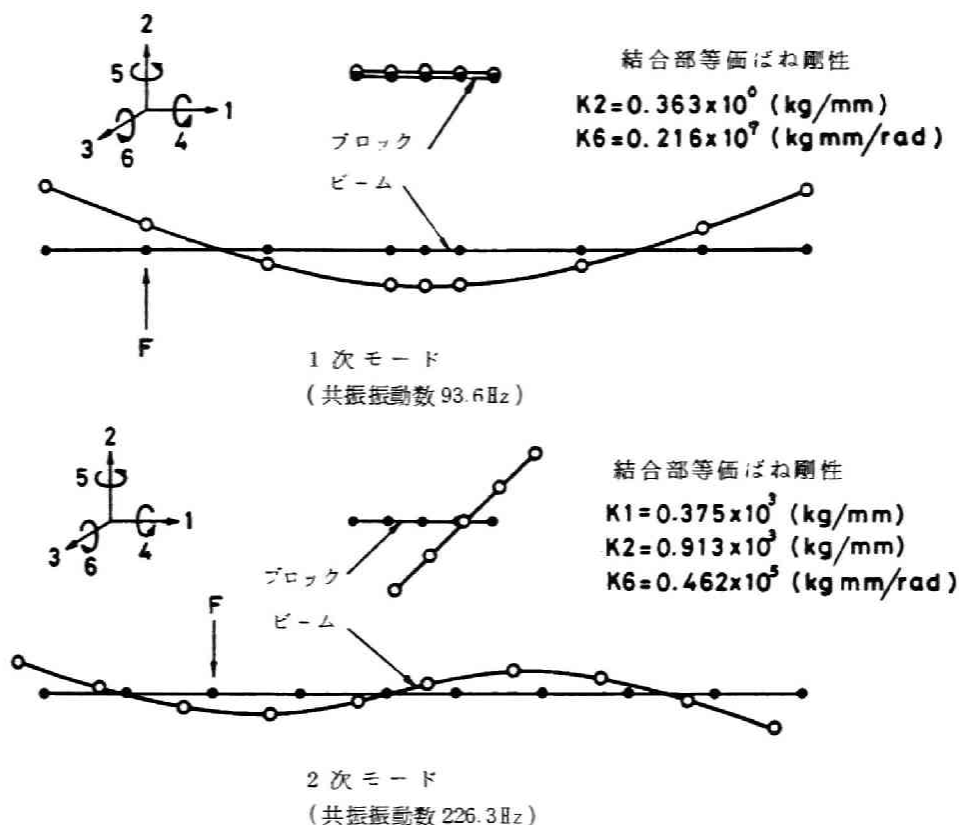


図 3-32 案内皿モデルの計算機シミュレーションによる振動モード形

る。一方 2 次モードでは、ブロック、ビームとも 2 方向の運動はもちろん、それと同程度に 1 方向にも運動し、しかも 1 方向の運動はブロックとビームではその方向が逆である。

表 3-6 は、1 次および 2 次モードにおいて、接合結合面等価ばねに貯えられる復元エネルギーを 100 % とし、そのうち各座標方向のばねにどれだけの割合で貯えられているかを示している。これによると 1 次モードでは 88 % を 6 方向すなわち曲げのばねのエネルギーが占めており、また 1 方向すなわち接触面に平行な方向のばねに貯えられるエネルギーはわずか 0.5 % である。それに対

して2次モードでは、逆に1方向のばねの復元エネルギーが80%を占め、6方向の復元エネルギーは0.4%しかない。これより1次モードではブロックとビームとの相対的な曲げ運動が支配的であり、2次モードでは相対的2面間の平行運動が支配的であるという判断

表3-6 結合部において各座標方向に貯えられる復元エネルギーの割合

	1次モード	2次モード
1方向	0.512	79.790
2方向	11.194	19.791
6方向	88.294	0.419
Total	100.00 (%)	100.00 (%)

を下することができる。またモデル系全体の最大復元エネルギーに対する接触結合面に貯えられる最大復元エネルギーの割合は、計算機シミュレーションの結果1次共振モードでは2.6%、2次共振モードでは80.3%であり、2次共振モードの方が接触結合面の特性が実験結果に大きく現われることがわかる。

(Ⅳ) 実験結果と考察

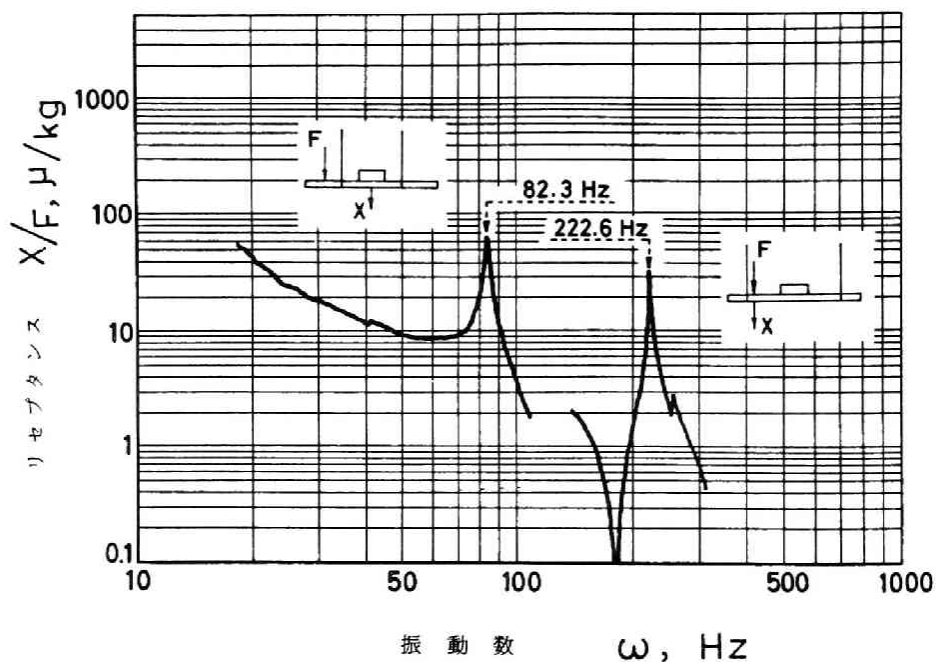


図3-33 案内面モデルの周波数応答の一例

図 3-33 にこのモデルの加振実験による周波数応答の一例を示す。これは μ 1 のモデルを、接触面を清浄にして油を入れない状態でビーム上に乗せ、測定したものである。1 次の共振振動数は 82.3 Hz, 2 次の共振振動数は 222.6 Hz である。この場合も溶接結合部モデルの場合と同様、1 次と 2 次の共振振動数付近の周波数応答の測定において変位の検出点が異なるため曲線が連続ではない。

次に図 3-34 に 1 次モードおよび 2 次モードでのベクトル線図の一例を示す。○印が 1 次モードの場合、●印が 2 次モードの場合でいずれも μ 3 のモデルの接触面に油を

0.1 cc 介在させた状態で 0.05 kg の力で加振した時のものである。この場合も測定点がきれいな正円上に乗っており、減衰比の値は 1 次モードで 0.0204, 2 次モードで 0.00783 である。このようにして得られた減衰比が種々のパラメータによりどのように変化するかを以下に述べる。

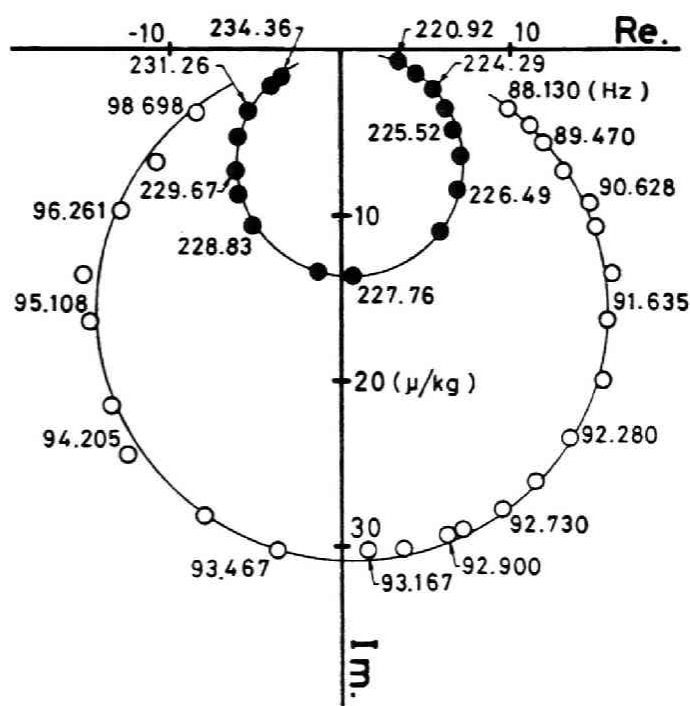


図 3-34 案内面モデルのベクトル線図の一例

(a) みかけの接触面積（平均接触面圧）による影響

図 3-35 にみかけの接触面積が変わった時の減衰比 ζ の変化を示す。(a)は

1 次の共振モードにおいてモデル No. 1 から No. 4、つまり溝を切らないもの、接触面積が $1/2$ のもの、 $1/5$ のもの、 $1/10$ のものの 4 種類のモデルに対し、加振力を $0.05\text{ kg} \sim 0.7\text{ kg}$ (pk to pk) まで変化させた時の減衰比の測定結果で、また (b) は同じモデルを 2 次の共振モードにおいて加振力を $0.03\text{ kg} \sim 0.1\text{ kg}$ (pk to pk) まで変化させた時の減衰比の値である。案内面結合部モデルにおいてはボルト結合部モデルに比べて接触面圧が低いから、接触面間の油膜が形成されやすく、ボルト結合部モデルの場合にはみられなかった油膜の粘性による粘性減衰があると考えられる。それ以外にも、もちろんこれまでに考えてきた金属接触 2 面間の相対運動による減衰もあるわけで、案内面モデルの減衰を考える場合、大きく分けてこの 2 種類の減衰があると考えられる。

図 3-35 (a) の 1 次モードの場合、みかけの接触面積が一番

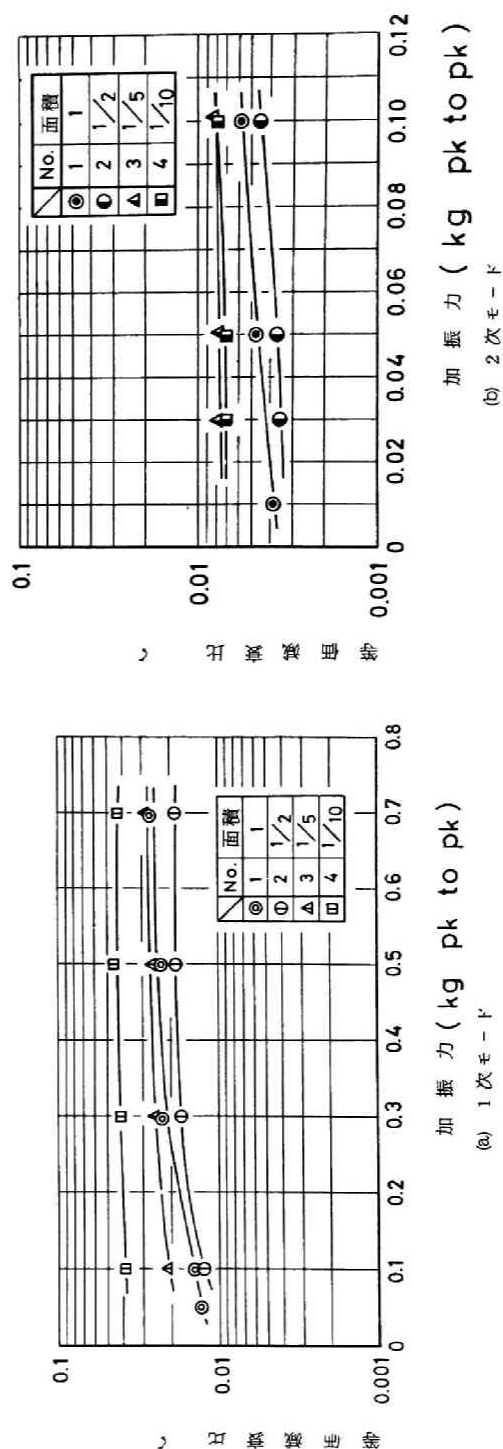


図 3-35 平均接触面圧に対する減衰比の変化

小さい、つまり平均接触面圧が一番大きい、 μ_4 のモデルの減衰比が最大であり、続いて μ_3 のモデルの減衰比が大きい、 μ_1 と μ_2 のモデルを比べると、平均接触面圧が小さい μ_1 のモデルの方がかえって大きな値をとっている。これは μ_4 および μ_3 のモデルでは 2 面間の金属接触の相対運動による減衰が支配的であり、一方 μ_1 および μ_2 のモデルでは 2 面間の油膜による減衰が支配的であると考えれば、説明をつけることができる。つまり、 μ_3 および μ_4 のモデルではみかけの接触面積が $1/5$ および $1/10$ と小さいからそれだけ接触面圧が高く、しかも接触面上に残した山の幅が狭いから連続的な油膜を形成しにくく、この 2 つのモデルでは、油膜がきれた部分での接触 2 面間の相対運動による減衰が支配的であり、面圧の高い μ_4 のモデルの方が高い減衰を示すと考えられる。一方 μ_1 の溝を切っていないモデルでは面圧も低くかつ接触面積も広いので油膜が形成され油膜の粘性減衰が起こり得る。そして μ_2 のモデルでは μ_1 のモデルに比べて接触面積が小さくそれだけ油膜面積が小さいために減衰が小さいと考えられる。

一方、図 3-35 (b) に示す 2 次モードでは、接触面に平行な 2 面間の相対運動が支配的であり、単位面積当りの面圧の他に接触面積によっても影響を受け、結局 2 面間に作用する全面圧が等しければ、接触 2 面間の相対運動によって生ずる減衰は等しいと考えられ、 μ_3 のモデルと μ_4 のモデルではほぼ同じ減衰比が測定されたと考えられる。

また、1 次モードと 2 次モードの接触結合面の最大復元エネルギーがモデル系全体の最大復元エネルギーに対して占める割合は、既に述べたように 2.6 % および 80.3 % と 2 次モードの方がはるかに大きく、2 次モードでは接触結合面の特性が測定値に 1 次モードに比べより拡大して現われるにもかかわらず、1 次モードと 2 次モードの減衰比を比べると、いずれのモデルでも 1 次モードの方が 4 ~ 5 倍大きくなっている。ここで油膜の粘性による減衰を考える場合、先程述べた接触面間の相対運動を考慮すると、1 次モードでは油膜のスクイーズ作用による減衰、あるいはウェッジ作用によるものと考えられ、同じ油膜の減

衰といってもその発生形態は異なっており、1次モードの方が油膜による抵抗が大きいことが考えられる。また、ボルト結合部モデルの項で述べた様に、この1次モードでの接触面が相対的にぶつかりあう運動は相対的な2面間のせん断運動よりも生じやすく、従って減衰も生じやすいと考えられる。このように2面の接触運動が支配的な場合でも、油膜の粘性が支配的な場合でも、1次モードの減衰の方が2次モードの減衰よりも大きくなっていると思われる。

最後に加振力の影響をみてみると、加振力を増大するに従って減衰比の値も幾分増加してはいるけれども、ほぼ一定である。このモデルは、ボルト結合部モデルよりもさらに減衰の発生しやすいモデルであるので、小さな加振力ですでに油膜による減衰、あるいは減衰を発生させるための有意な相対運動をおこしており、それ以後加振力をあげても、それほど変化がみられない。

(b) 溝の数（みかけの接触面積一定）による影響

図3-36にみかけの接触面積が λ_1 の溝を切らないモデルの場合の1/2の面積として一定にし、接触面上に残した山の数をも2本、4本、8本としたモデルを加振実験した時の減衰比の差異を示す。(a)は1次モードにおいて0.1 kg～0.7 kg (pk to pk)の加振力で加振した場合で、(b)は2次モードにおいて0.03 kg～0.10 kg (pk to pk)の加振力で加振した場合の減衰比である。

まず図3-36(a)の1次モードの場合をみると、○印の λ_2 と△印の λ_5 の場合はほとんど同じ値であるが、□印の λ_6 のモデル、つまり山の数も8本の場合、他の2種のモデルよりもいずれの加振力においても大きくなっている。この3種類のモデルはいずれもみかけの接触面積が溝を切らない場合の1/2であり、ブロック重量は一定であるから、みかけの平均接触面圧は一定である。したがって、これらのモデルの間で生じる減衰比の差は、減衰に有効な油膜が存在するか否かによると考えられる。図3-36(a)の結果より、 λ_5 および λ_6 のモデルでは油膜による減衰が支配的であり、両者は接触面積が同一であることよりはほぼ同じ減衰比を示している。ところが λ_6 のモデルで山の数も8本になると、1本の山の幅が4 mmないし4.25 mmと大変細くなる。そのために連

統的な油膜を形成できず、ブロックとビームの相対的な接触運動によって、高い減衰が生じていると考えられる。

次に図3-36(b)に示す2次モードの結果をみると、この場合も油膜が形成できず接触金属面間の相対運動が支配的と考えられる。図6のモデルは、他のモデルに比べて大きな減衰比を示しており、加振力の変化に対してもほぼ一定である。しかし、図5のモデルの減衰比の値は、加振力が低いと図6のモデルの約半分であるが、加振力が大きくなり相対運動の振幅が大きくなると、1次モードの場合と異なり図6のモデルの減衰比に近づく。これは、1次モードでは2面間の垂直方向のぶつかり合いの運動が支配的であったのに比べ、2次モードでは接触面が面に平行の相対的なせん断運動をするため、油膜が切断されやすく、しかも相対的なせん断運動の振幅が大きくなるにつれて、その傾向が強くなると考えられ

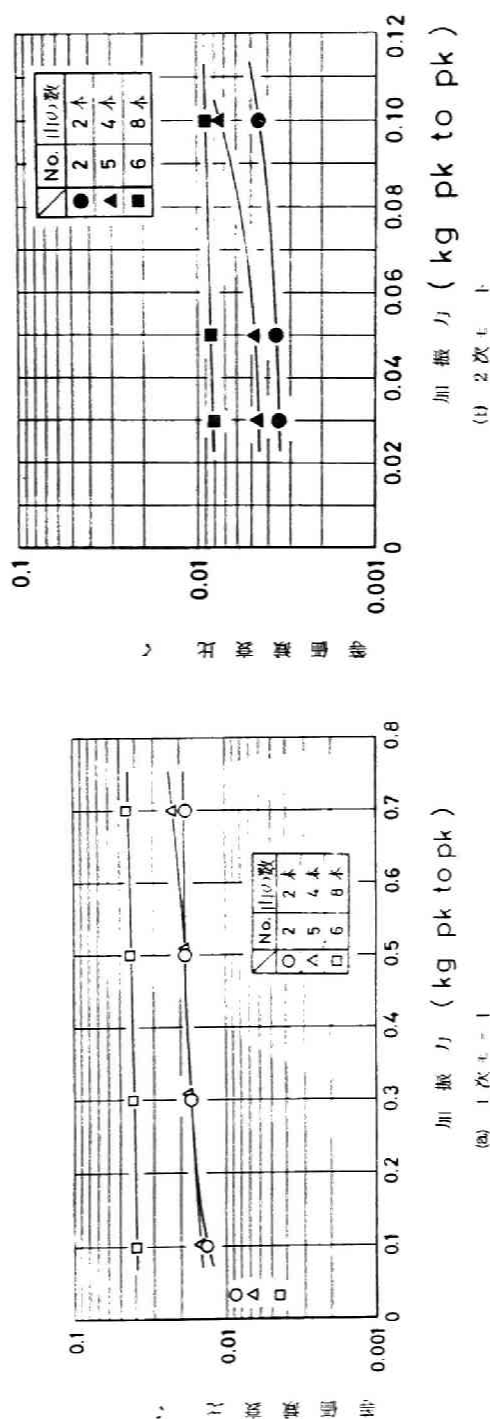


図3-36 層の数(平均接触面積、みかけの接触面積一定)に対する減衰比の変化

る。したがって K_5 のモデルでは、加振力の小さな領域では減衰比の値が小さいが、加振力が大きくなるにつれて油膜がきれ、接触面の相対運動による減衰が発生し、 K_6 のモデルに近い減衰の値をとると思われる。そして K_2 のモデルでは加振力が大きくなるとやや減衰比が大きくなっているが、まだ十分に接触金属面間の相対運動を起こすに到っていないと考えられる。

(Ⅳ) 結合部等価ばね剛性および等価減衰係数の計算

(a) 等価ばね剛性

以上の測定結果を用いて、3.2.5節(Ⅲ)に述べた手法により結合部等価ばね剛性および等価減衰係数の計算を行った結果について述べる。まず結合部等価ばね剛性の最適な組合せを求めるわけであるが、ここで問題となるのは、最適解が一意的に求まるかどうかという点である。そこで、1次の共振モードにおいて、1方向のばね剛性 K_1 を一定としておき(1次モードの場合1方向のばねはほとんど影響を持たないので)、2方向のばね剛性 K_2 を各種設定しておいて各場合についてモデルの共振振動数がある目的値に収束する様に、6方向のばね剛性 K_6 を変化させたときの様子を図3-37に示す。この場合目的とする共振振動数は94 Hz、そして K_2 は図中に示す9種類設定し、 K_6 は $8.5 \times 10^6 \text{ kg/mm/rad}$ を出発点として変化させた。この図をみると、 K_2 と K_6 の組合せから求まる共振振動数が描く曲面は、 K_2 が 50 kg/mm より大きく 60 kg/mm より小さなある値を境にした一種の双曲面となる事がわかる。そして K_2 が 60 kg/mm 以上の値では、 K_6 をいかに変化させても、目的とする共振振動数より低い値に収束してしまう。また、 K_2 が 50 kg/mm より小さい領域のたとえば⑤の $K_2 = 5 \text{ kg/mm}$ においては目的の共振振動数より大きな値に収束するが、④の $K_2 = 0.363 \text{ kg/mm}$ ではじめて目的の共振振動数に収束し、以下④の $K_2 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ kg/mm}$ の場合までいずれもある K_6 に対して収束する。この場合収束した K_2 の値の変化による振動特性の変化は小さく、目的の共振振動数に収束する K_2 と K_6 のうち K_2 、 K_6 の値の差が最も小さい組合せを最適なばねの組合せとした。より詳しくはいろいろな物理的な特性に関する条件および制

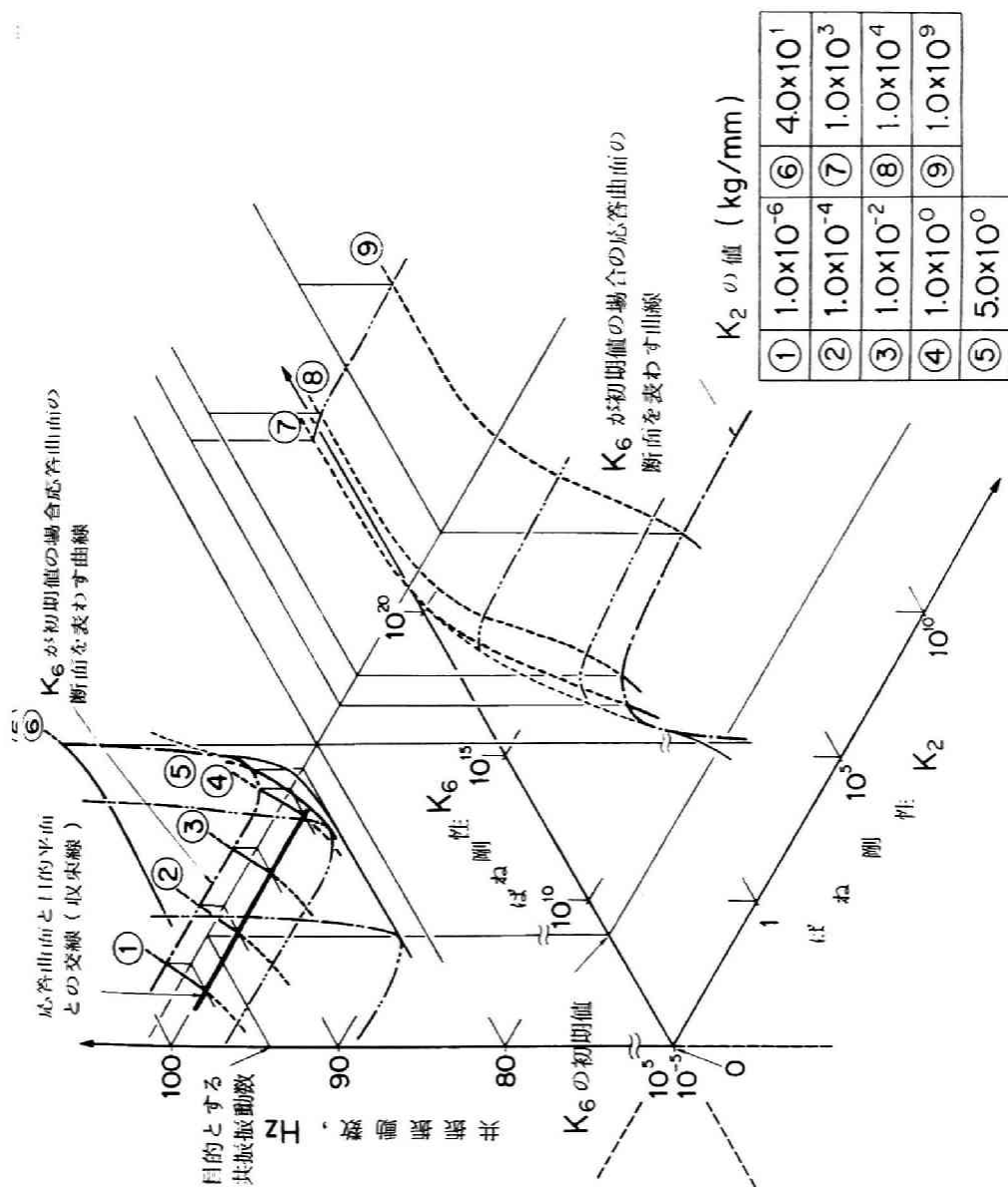


図 3-37 各方向のばね剛性に対する共振振動数の関係 (1 次共振モードの場合)

約条件を付け加えることにより、最適値の存在範囲を狭め、シンプレックス法を用いてもっと有効に最適なばねの組合せを定めることができると考えられるがここでは行っていない。

このシンプレックス法により得られた、1次共振モードおよび2次共振モードの結合部等価ばね剛性の値を図3-32の右上にそれぞれ示している。

(b) 等価減衰係数

こうして結合部等価ばねの最適な組合せが求めれば、ボルト結合部モデルの場合と同じ方法によって案内面の接触部のみの減衰エネルギーを求める事ができる。その計算の流れは図3-20に示すと同じであるが、案内面モデルの場合は表3-6に示した様に、例えば1次モードの場合6方向の運動が支配的であるとはいえ、2方向にも運動しており、求められた結合部の減衰エネルギーはこの2種類の方向のダンパーで消散されるエネルギーの和になっている。そこで、結合部全体の減衰エネルギーに対する各方向のダンパーで消散される減衰エネルギーの比が、同じ方向のばねに貯えられる復元エネルギーの結合部全体の復元エネルギーに対する比に比例するものと仮定して、各方向で消散される減衰エネルギーを求めた。求まった減衰エネルギーから各方向の等価減衰係数を決定する手順はボルト結合部モデルと同様であるが、実験結果から減衰を発生させる要因として接触面間の相対運動が支配的な場合と、油膜が支配的な場合の2種類ある事が推察されており、減衰機構としては前者がヒステレティック減衰、後者が粘性減衰に近似しうる。そこで結果に応じていずれかを選択して採用する必要があるが、この場合ではボルト結合部モデルに比べればはるかに油膜による効果が大きいと考えられるため、等価減衰係数として粘性減衰係数を仮定して計算した。その一例を表3-

7に示すが、ここでは、各固有モードにおいて支配的な運動をする方向、つまり1次モードでは6

表3-7 案内面モデルの結合部等価減衰係数の一例

1 次 モード	2 次 モード
6 方向等価減衰係数 $C_6 (kg \cdot mm / rad / sec)$	1 方向等価減衰係数 $C_1 (kg / mm / sec)$
1.242×10^5	3.616×10^{-3}

方向、2次モードでは1方向の等価粘性減衰係数の値のみを示している。

(Ⅵ) 案内面モデルの動的剛性および減衰能についての結論

ねずみ鋳鉄製のベッドに相当するビームの上にS50C製のテーブルに相当するブロックを乗せた案内面を単純化したモデルの接触結合部の動的剛性および減衰能を、ボルトおよび溶接結合部の場合と同じ実験方法で正確に測定し、電子計算機プログラムによるシミュレーションの結果と合せて以下の結論を得た。

- ① 接触面の減衰能には、接触2面間の金属接合による凝着した状態で行なう2面間の相対的な運動の他に、ボルト結合部モデルでは見られなかった油膜の粘性も影響を及ぼしており、接触の状態によっていずれかの影響が減衰の発生に対して支配的である。
- ② みかけの接触面圧が高く接触面積が小さい場合には2面間の相対運動による減衰が支配的であり、接触面圧が高くなるにつれて測定された減衰比の値も大きくなる。一方、接触面圧が低く接触面積が大きい場合（溝を切らないモデル）では油膜の減衰効果が大きくなり、接触面圧の高いモデル（接触面積が1/2のモデル）よりも大きな減衰比の値が測定された。
- ③ 同じ接触面圧を持っていても、油膜が形成されやすいか否かで減衰能が異なり、油膜が形成されにくい場合の方が減衰が大きい事がわかった。
- ④ 案内面モデルの接触部の相対運動を複数のばねの組合わせで表現し、シンプレックス法を用いて実験モデルと対応する最適なばね定数の組合わせを求めることができた。さらに減衰エネルギーの評価より結合面等価減衰係数を求めた。
- ⑤ ボルト結合部や溶接結合部の場合とは異なり案内面モデルの振動モードは、接触部の運動を1次の共振振動モードでは曲げモーメントのみで、2次の共振振動モードではせん断力のみで厳密に一次的に表現する事はできないが、概略は1次モードでは曲げモーメントによる運動が、2次モードではせん断力による運動が支配的である。

3.2.6 結 言

機械構造物の代表的な結合部であるボルト結合部，溶接結合部および案内面に着目し，その振動特性を解明し，最終的には，機械構造全体の振動挙動の解析に結びつける事を目的として研究を行った。そこで，現象が明確に把握できるように単純化した実験モデルを用い，新しく考案した実験方法により加振実験を行ない，そして電子計算機プログラムによるシミュレーションを並行して行って接触面間の巨視的な挙動の評価および解析と結合部のみの等価な剛性および減衰係数を求めた。その結果以下の結論が得られた。

- (1) 実験モデルの振動特性を利用し，共振振動状態で変位が常に0となる節点においてモデルを支持しておいて加振実験を行なう事により，モデルの減衰特性を支持系の影響を受ける事なく精度よく測定する事ができた。これにより第Ⅰ章1.2.2節で述べた振動システムの範囲を明確にするという問題提起に対する解決がなされている。
- (2) 異なった共振振動モードで加振実験を行なう事により，結合部に作用する力を曲げモーメントのみとせん断力のみとに分離でき，各々の力（振動内部力）によって引き起される運動に対する減衰能を別個に評価できた。案内面モデルでは，これらの力が組合さって作用しているが，支配的な運動はボルト結合部および溶接結合部モデルの場合と同じである。
- (3) 結合部の減衰は接触面の相対的な運動と密接な関係があり，同じ結合部でも相対運動を起しやすい接触面間の振動モードと起しにくい振動モードとがある。したがって結合部の減衰を考える場合，本節の緒言で述べたように，まず結合部に加わる振動内部力のパターン（マクロな接触面間の振動挙動）を考慮することが重要である。
- (4) 減衰を発生させる要因として，接触二面間が局部的に凝着した状態で相対運動する事によって生じるものと，面間に存在する油膜の粘性によって生じるものと考えたが，接触面圧が高い場合には二面間の相対運動によるものが支配的であり，油膜の影響はほとんどみられない。むしろ，ボルト結合部

モデルの場合油膜が存在する事によって接触面間の局所的な凝着が抑えられ、かえって減衰が低くなる。しかし案内面のように接触面圧がかなり低い場合には油膜の粘性による減衰作用が大きくなる。

- (5) 油膜による減衰の場合、同じ接触面圧下においても接触面の状態によって有意な油膜を形成できる場合と形成できない場合とがあり、油膜が形成できない場合の方が減衰が大きい。
- (6) これらの実験結果を電子計算機プログラムによるシミュレーション結果と合せる事により、材料内部減衰をも除いた純粋に結合部のみの減衰特性、ならびにばね剛性を定量的に評価することができた。
- (7) 本研究で用いた単純化モデルにおいて、接触面間の状態（介在物、面圧、接触表面状態等）を定めたのち、本章で解析したように接触結合面間に加わる振動内部力を評価して振動特性を求めておけば、たとえ実際の機械においてみかけの形状の異なる結合部があっても、そこでの振動内部力と対応させる事により、本研究の結果を実機に適用することができると考えられる。

第 3 節 実機における結合部の動的剛性および減衰能の解析

3. 3. 1 緒 言

実機における結合部の動的剛性および減衰能の解析の例として、本節に、円筒研削盤に組み込まれる、動圧軸受をもつホイールヘッド主軸部の振動特性の解析と、工作機械テーブル案内面の振動特性における減衰能の解析について述べる。

主軸軸受部は種々の結合部の中で比較的容易にその等価剛性を理論的に求めることができる。ここでは軸受部の等価剛性を圧力分布の測定値と圧力分布形状の仮定より求め、それを用いて第Ⅱ章第3節で述べた動剛性合成法電子計算機プログラムにより振動特性を計算した。また同時に、実験による振動特性の測定をも行った。計算機シミュレーション結果からは、実験では求めることが困難な特性値が得られ、最適な軸受すきまの設定や主軸系の設計変更に役立つものとする。

一方、案内面は、前節の単純化案内面モデルの振動特性の結果からもわかるように、理論解析だけからその特性を求めることは困難である。また実際の工作機械案内面の減衰能を測定する場合、隣接する送り駆動部などの他の要素より種々の影響を受けて得られた結果に対する信頼性が疑わしくなる危険がある。そこで、送り駆動時の案内面の減衰能を送り駆動部の影響を測定結果から除くことが出来る新しい案内面の減衰能を測定する手法を開発した。そしてこの手法を用いて、工作機械テーブルがすべり案内あるいは静圧案内を持つ場合の減衰能を測定し、結合部等価ばねおよび等価減衰係数を求めた。さらにこの特性値を用いて動剛性合成法電子計算機プログラムにより振動特性をシミュレーションした。

円筒研削盤ホイールヘッドの解析を 3. 3. 2 節に、工作機械テーブル案内面の解析を 3. 3. 3 節に述べる。

3.3.2 円筒研削盤ホイルヘッド

(i) 序 論

構造部材または要素を結合する種々の結合法の中で、軸受部は比較的容易にその等価剛性を理論的に求めることができ、それより得られた等価剛性を用いて、主軸軸受系の振動特性を計算することができる場合が多い。ここでは、実機の円筒研削盤の動圧軸受をもつホイルヘッド部分を取りだし、これを空気ばねにより支持された重量が約1トンのブロック上にホイルヘッド部を固定した台を載せて、主軸を回転させ動圧が発生した状態での主軸系の振動特性を実験により測定するとともに計算機シミュレーションの両面より解析した。その結果のうち、主として計算機シミュレーションの方法とその結果について述べる。

通常機械構造の振動特性を解析する場合、第1章第2節で述べたように機械システム全体を振動系として考えることが必要なのであるが、ホイルヘッドが円筒研削盤に組み込まれた状態でホイルヘッド部分のみの振動特性を測定し、計算機シミュレーションとの対応を調べることは困難である。そこでホイルヘッド部分のみの目的とする振動数範囲内での特性が解析できるように、ホイルヘッド部分のみを取り出した上記の実験方法で測定し、計算結果との対応を調べた。

実験結果だけからは、測定を行っている点の力と変位等みかけの特性しか求められないことが多いが、並行して実験系の計算機シミュレーションを行えば、実験ではどうしても求められない詳細な変数を解析したり、定量的な評価を容易に行うことができる。ここでは、計算機シミュレーションと実験との対応を周波数応答および共振振動数より確認しておき、その後計算機シミュレーションより正確なモード形およびエネルギー分布を求め、主軸系の各要素が振動特性上どのような動きをしているかを解析した。これにより、このホイルヘッド部の設計変更、最適な使用条件の設定等の情報を与えるものと考えられる。

(ii) ホイルヘッドの振動特性解析のためのモデル化

図3-38(a)は、2箇所マッケンゼン型動圧軸受をもつ円筒研削盤ホイル

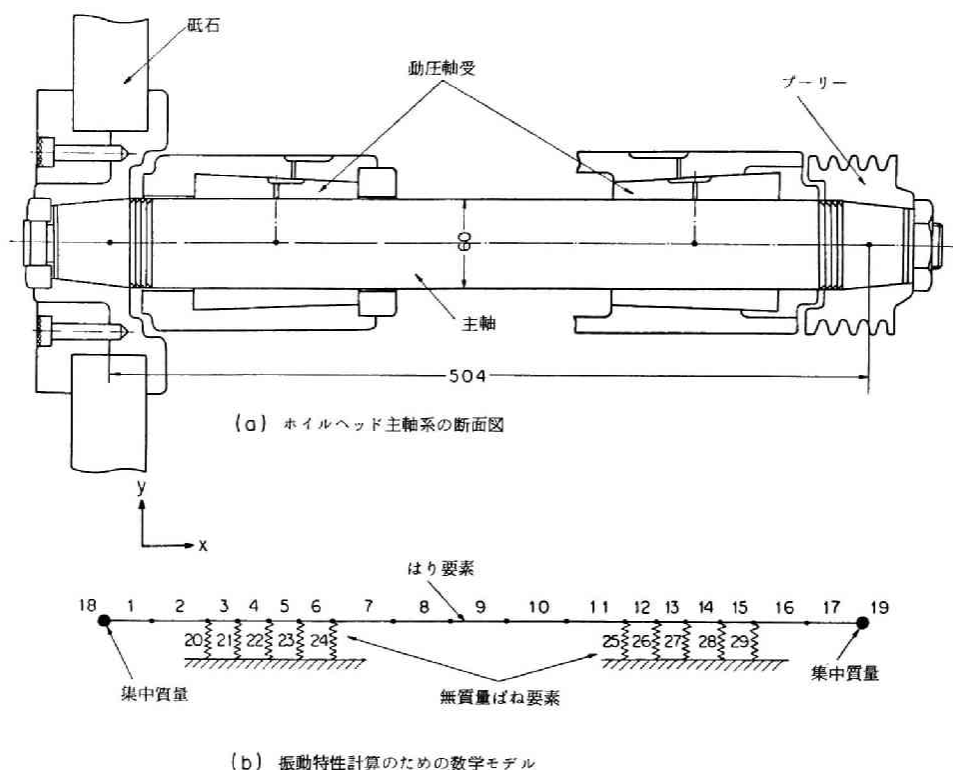
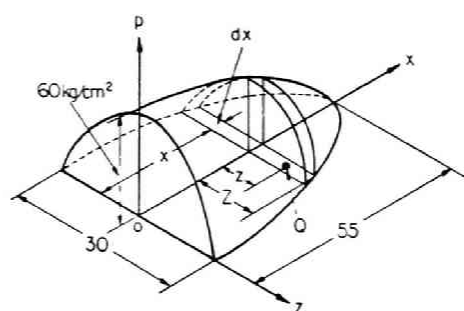


図 3-38 円筒研削盤ホイルヘッド断面図と振動特性計算のための数学モデル

ヘッド主軸系の断面図を示している。主軸の直径は 60 mm ，軸の長さは 504 mm ，これに重量約 18.3 kg の砥石と 4.8 kg のプーリーがついている。この主軸系の振動特性を計算機シミュレーションするために，図 3-38(b)に示すように主軸を 17 本のはり要素，砥石とプーリーをそれぞれ集中質量でモデル化し，動圧軸受部は次に述べるようにして等価なばね剛性を求め，1 個所の軸受を 5 つの y 軸方向の無質量ばね要素で置き換えた。

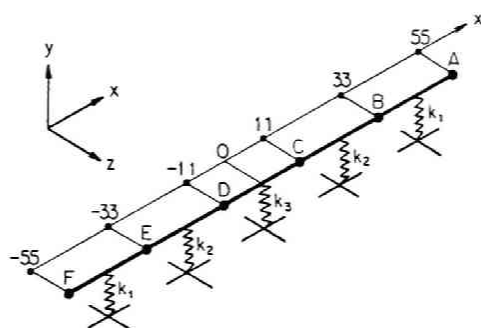
軸受部にくさび型油膜によって圧力を発生するパッドは円周上に 3 個配置されており，1 つのパッドの軸方向の長さは 110 mm で円周方向軸受幅は 30 mm である。主軸が回転することにより，図 3-39(a)に示すように軸受長さ 110 mm を長径，軸受幅 30 mm を短径とする楕円の内側において動圧が発生し，その

圧力分布は、図に示すように x 軸に垂直な平面内で z 軸を長径とする半楕円形状をしているものと仮定する。実験による測定結果より軸受すきまが $20\ \mu\phi$



(a) 動圧軸受部圧力発生の説明図

の状態において軸受中心部の発生圧力は $60\ \text{kg/cm}^2$ であり、そのとき主軸が $1\ \mu\phi$ 方向に変位したときの圧力変動は $9.5\ \text{kg/cm}^2$ （変位 $1\ \mu\phi$ あたり $9.5 \times 10\ \text{kg/cm}^2$ ）であることがわ



(b) 動圧軸受部等価ばねへの置換え

かっている。なお図3-39(a)では圧力分布は z 軸に対して対称であることより、片側の

図3-39 動圧軸受部圧力発生および等価ばねへの置換えの説明図

みを表わしている。図3-39(b)は、この軸受部分を5つの等区間に分割し、それぞれの区間の中心点を y 方向の等価剛性はねで置換えた部分のモデル化を示している。以下に上記の圧力分布の仮定のもとで等価ばね剛性の置換えの計算について述べる。

図3-39(a)において x 軸上の x (mm)での圧力 P (kg/cm²)は

$$P = 60 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{55}\right)^2} \quad (3-16)$$

となる。また x と z (mm)の間には

$$Z = 15 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{55}\right)^2} \quad (3-17)$$

の関係がある。そして図中のQ点における圧力 $P'(kg/cm^2)$ は

$$P' = P \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{Z}\right)^2} \quad (3-18)$$

として求まる。そこで軸が xz 平面に垂直に変位したとき、変位 $1mm$ 当りのQ点における圧力差 $P_r(kg/mm^2)$ は

$$P_r = 9.5 \times 10 \frac{P'}{60} \quad (3-19)$$

となり、したがって dx 区間における圧力差 $P_r'(kg/mm^2)$ は、

$$P_r' = dx \int_{-Z}^Z 9.5 \times 10 \frac{P'}{60} dz = 2 dx \int_0^Z \frac{95}{60} P' dz \quad (3-20)$$

として求まる。この(3-20)式に(3-18)式を代入して計算すると、

$$P_r' = \frac{190}{60} P dx \int_0^Z \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{Z}\right)^2} dz = \frac{190}{60} \frac{\pi Z}{4} P dx \quad (3-21)$$

となり、この(3-21)式に(3-16)式と(3-17)式を代入すれば、

$$P_r' = 190 \times 15 \times \frac{\pi}{4} \left[1 - \left(\frac{x}{55}\right)^2 \right] dx \quad (3-22)$$

と定まる。これより x が $33mm \sim 55mm$ の区間での圧力変動 P_{K1} は、軸の動きと反対側は他の二つのパッドの作用により同じ値の負圧になるので P_r' を2倍にして、

$$P_{K1} = \int_{33}^{55} 2 P_r' dx = 3.41 \times 10^4 kg/mm \quad (3-23)$$

として求まる。これは、 x が $33mm \sim 55mm$ の区間における y 軸方向の等価ばね剛性 k_1 に相当する。同様にして $k_2 = 8.14 \times 10^4 kg/mm$, $k_3 = 9.72 \times 10^4$

kg/m^2 として求まり、圧力分布が z 軸に関して対称なことから、図 3-39(b)に示すように等価ばねへの置換えができる。

(iii) 計算結果

図 3-40 は、以上のモデル化を行った円筒研削盤ホイールヘッドの砥石点 A

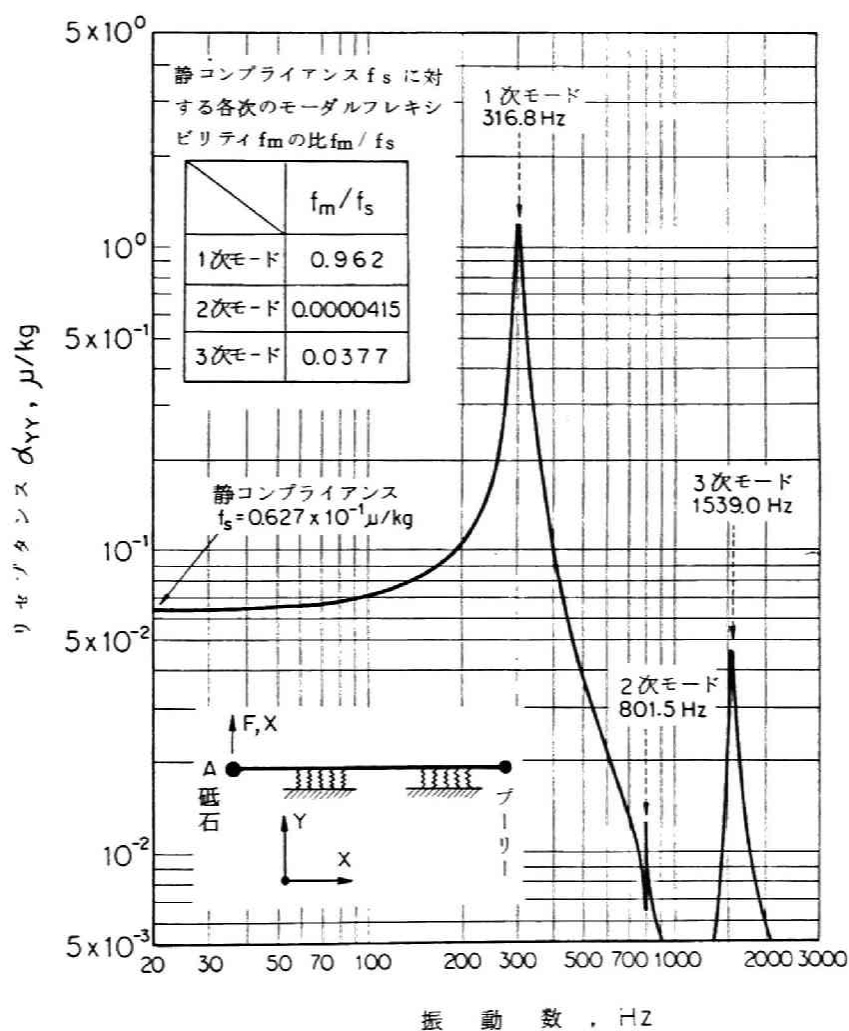


図 3-40 円筒研削盤ホイールヘッドの砥石点 A における y 軸方向のリアプタンス α_{yy} の周波数応答および各次のモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比の計算値

におけるY軸方向のリセプタンス α_{YY} の周波数応答を、第Ⅱ章第3節で述べた動剛性合成法電子計算機プログラムシステムを用いて計算した結果を表わしている。また、図中の表に静コンプライアンス $f_s = 0.627 \times 10^{-1} \mu/kg$ に対する各次のモーダルフレキシビリティの比を示している。1次の共振振動数は316.8 Hzで、このモード次数のモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s は0.962であり、この固有モードのモーダルフレキシビリティが極度に大きいことがわかる。

このホイールヘッドの実機における加振実験では、プーリーにVベルトをかけ、モーターによってホイールヘッドを回転させた状態で、砥石の回転中心の点に空中より吊った動電型加振器の先をあててセットし、斜めより加振した。また変位は容量型変位計により砥石の振動変位を測定した。図3-40の計算結果と同じ $20 \mu\phi$ の軸受すきまの実験状態で、共振振動数は318 Hz、そして本章第2節で述べたと同様の減衰比の測定法を用いて求めたこの共振モードの減衰比 ζ は0.0252であり、リセプタンスの最大値は $1.13 \mu/kg$ であった。図3-40に示す周波数応答の計算結果では減衰能をシミュレーションしていないが、周波数応答のピーク値 R_m は実験より得られた減衰比 $\zeta_m = 0.0252$ を用い、計算結果より得られたモーダルフレキシビリティ $f_m = 0.603 \times 10^{-1} \mu/kg$ の値と $R_m = f_m / (2\zeta_m)$ の関係より、 $R_m = 1.1964 \mu/kg$ として求められる。このように計算結果と実験結果は1次モードにおいてよく一致しており計算と実験はよく対応していると判断できる。そこで、実験では測定することが不可能なこの共振モードでのエネルギー分布を計算より求められ、砥石、主軸、軸受等が振動特性上どのような働きをしているかを知ることができる。図3-41はこの1次の共振振動数におけるモード形（図中の太い実線）とエネルギー分布の計算値を示している。また図中の表には、各要素に貯えられる最大復元および最大慣性エネルギーの分布割合を表わしており、復元エネルギーは主軸に67%、そして動圧軸受1に31%貯えられており、また慣性エネルギーは砥石に約99%が分布していることがわかる。図中の点線は主軸のはり要素に

各要素に貯えられるエネルギー分布割合

	砥石	主軸 （はり部）	軸受 1	軸受 2	プーリー	計
復元エネルギー 分布割合	—	0.673	0.310	0.0175	—	1.0
慣性エネルギー 分布割合	0.988	0.0103	—	—	0.00172	1.0

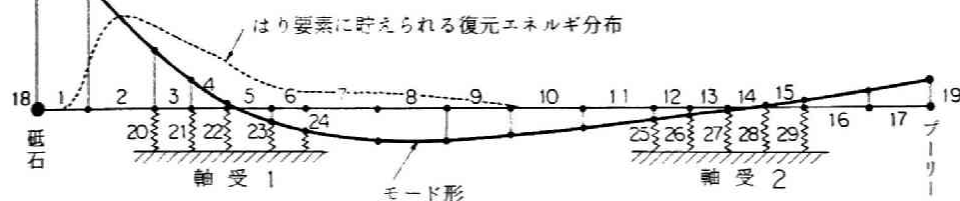


図3-41 円筒研削盤ホイールヘッド1次の共振振動数(316.8 Hz)におけるモード形とエネルギー分布の計算値

貯えられる復元エネルギー分布を示している。以上の結果より、軸受1は振動特性の復元項としてこの固有モードにおいて重要な働きをしており、一方軸受2はほとんど影響をもたないことがわかる。また砥石の重量は非常に大きな影響をもっている。

(Ⅳ) まとめ

円筒研削盤の動圧軸受をもつホイールヘッドの振動特性を計算機シミュレーションにより解析した。動圧軸受部の等価ばね剛性は、主軸回転時の軸受中心部圧力と主軸の変化による圧力変化の測定値および軸受部の圧力分布が楕円形状をしているとの仮定により理論的に求めた。計算機シミュレーションの結果と実験値はよい一致を示し、その後計算機シミュレーションにより、実験では得ることが困難な主軸および軸受部のエネルギー分布を求め、各要素が振動特性上どのような働きをしているかを解析した。この結果は、ホイールヘッド部の設計変更や、最適な使用条件の設定に重要な情報を与えるものであると考えられる。

3.3.3 工作機械テーブル案内面

(i) 序 論

本章第2節において単純化モデルによる種々の結合部の動的剛性および減衰能の解析について述べたが、接触結合部での汎用性のある結果を得るために、また減衰能の物理的挙動と機構を解析するには、このような解析を積み上げることが必要である。一方、このような単純化されたモデルでの結果を実際の機械における結合部の結果へと橋渡しをするには、実際の機械の結合部の動的剛性および減衰能を正確に求めることが必要であり、両面からの解析が望まれる。

振動の減衰能の測定の最大の問題点は、目的とする部分だけでなく、振動系を構成する他の部分の減衰能までが測定値に入り、目的とするものだけを取り出すことが困難であることである。もしこの点を曖昧にして実験を行えば、それより得られた結果は単に混乱を招くだけのものとなる。単純化されたモデルでは本章第2節の方法等により比較的容易にこの問題点を解決できるが、実際の機械の場合困難であり、特に案内面において送り駆動時の減衰能を測定する場合は、送り駆動部の影響が測定結果に入る危険性をもっている。しかし、従来行なわれている研究は案内面の駆動部を含む減衰能の測定方法によるもの³⁻¹³⁾、³⁻¹⁴⁾、または、駆動部を含めた種々の案内面の減衰能を測定し、減衰能の最も低いと考えられる静圧案内面の測定値を差し引き、間接的に案内面のみの減衰能を求める方法³⁻¹⁵⁾によるものであった。

ここでは案内面の送り駆動部に影響されることなく、案内面自体の送り方向の動特性を精度よく測定できる新しい測定原理とその実際的な方法を述べる。さらに、この方法を用いて、実機に近い工作機械テーブル案内面構造において軟鋼およびフッ素系プラスチックの2種のすべり案内面と静圧案内面での等価剛性および等価減衰係数を送り速度を種々変えた場合に求めた結果について述べる。次にこれより得られた案内面の特性値を用いて、第Ⅱ章第3節で述べた動剛性合成法によりシミュレーションした例を示す。

(ii) 実験装置

実験装置の概略を図 3-42 に示す。ベッド①は鋳鉄製であり大形定盤上にレベリングブロックで強固に締付けられている。テーブル②も鋳鉄製で水平お

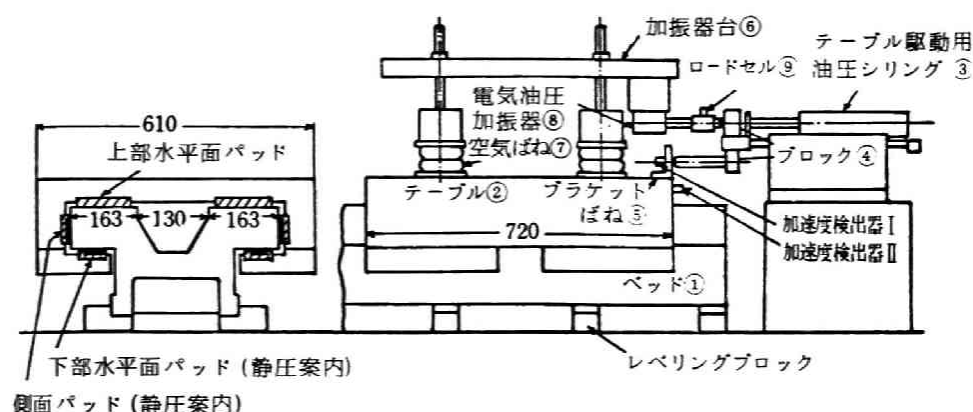


図 3-42 実験装置図

よび側方に計 12 個の静圧案内面パッドを設けている。上部水平面パッドのみは静圧案内面を 2 種のすべり案内面と交換できる構造となっている。これをすべり案内面として用いる場合には対向する下部水平案内面パッドのポケット圧力を変えることにより平均面圧を変えることができる。油圧シリンダ③はブロック④、ブラケットばね⑤を介してテーブルを駆動し、その送り速度は流量制御弁により $10 \sim 4000 \text{ mm/min}$ の範囲で可変となっている。テーブル上に加振器台⑥が剛性のきわめて低い空気ばね⑦で浮かせて支持されており、それに固定された加振器⑧は油圧シリンダのピストンロッド端に固定された鋼製ブロックをロードセル⑨が検出する変動力振幅が一定となるように制御されながら正弦波状の変動力で加振する。したがって加振器は空間に支持されているのと等価な作用をし、テーブルの送り運動中にも加振器でブロック④、ブラケットばね⑤を介してテーブルを加振することができる。ブラケットばねの加振点の裏側に加速度検出器Ⅰを、テーブル端面に加速度検出器Ⅱを取付けている。上面パッドをすべり案内面とする場合には、すべり案内面の中央に設けた給油穴

から潤滑油がオリフィス式絞り弁で制御されて強制給油される。本装置は潤滑油温を $26^{\circ}\pm 2^{\circ}\text{C}$ に保ち、外来振動の影響を防止する目的の精密作業室に設置し、その室温は $20^{\circ}\pm 2^{\circ}\text{C}$ に制御して実験を行った。

(iii) 案内面の動的剛性および減衰能の測定原理と方法

図 3-42 の実験装置は、図 3-43 に示す振動系にモデル化して考えることができる。この図のうち右下は計算機シミュレーションのためのモデル化で

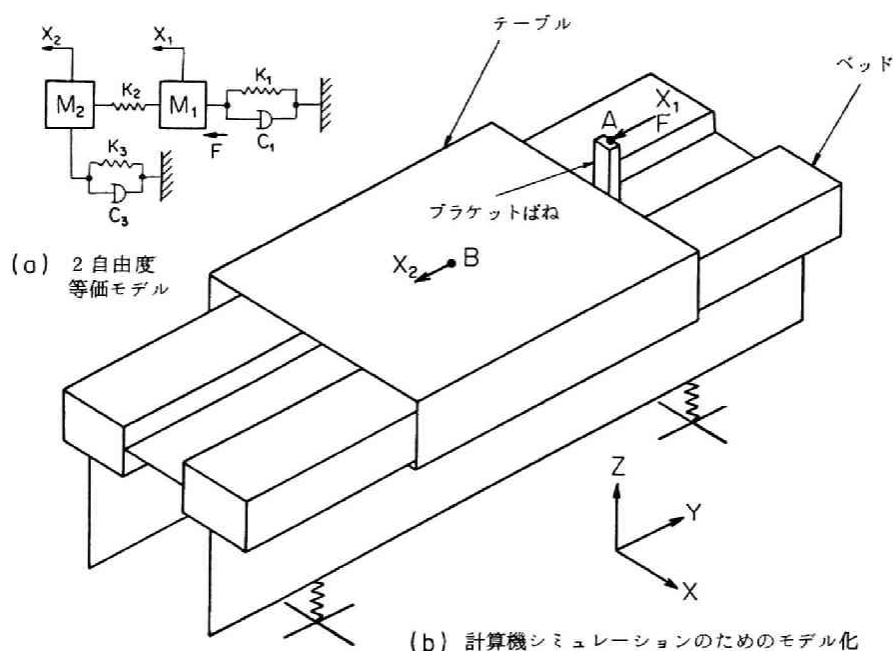


図 3-43 テーブル案内面 2 自由度等価モデルと計算機シミュレーションのためのモデル化

ある。そして左上の図は、2 自由度の等価振動モデルであり、図中の各記号の意味は次のようである。

- M_1 : 油圧シリンダのピストン、ピストンロッドおよびその先端に付加したブロックの等価質量
- M_2 : テーブル、ブラケットばねのベース部および空気ばねの下板の合計質量

K_1 : 油圧シリンダ内の油の体積弾性によるばね剛性

K_2 : テーブルに固定したブラケットばねのばね剛性

K_3 : 案内面における送り方向の等価ばね剛性

C_1 : 油圧シリンダの粘性減衰係数

C_3 : 案内面における送り方向の等価粘性減衰係数

X_1 : ブラケットばねの変位=ブロック端の変位

X_2 : テーブルの変位

F : 加振器によりブロックを加振する正弦波状加振力

このモデルで質量 M_1 を外部より F の力で加振した場合、質量 M_1 から質量 M_2 に作用する力は常にはね K_2 の変位に比例していることを考えれば、質量 M_1 と M_2 の運動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$M_1 \ddot{X}_1 + K_2 (X_1 - X_2) + K_1 X_1 + C_1 \dot{X}_1 = F \quad (3-24)$$

$$M_2 \ddot{X}_2 + C_3 \dot{X}_2 + K_3 X_2 = K_2 (X_1 - X_2) \quad (3-25)$$

(3-25)式で加振力の角振動数を ω とすると次式になる。

$$-M_2 \omega^2 X_2 + K_2 (X_2 - X_1) + K_3 X_2 + i C_3 \omega X_2 = 0 \quad (3-26)$$

したがって

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{K_2}{[(K_2 + K_3) - M_2 \omega^2] + i C_3 \omega} = \frac{\frac{K_2}{(K_2 + K_3)}}{1 + 2 i \zeta \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right) - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (3-27)$$

$$\text{ここに、} \omega_n: \text{等価固有角振動数} = \sqrt{(K_2 + K_3) / M_2} \quad (3-28)$$

$$\zeta: \text{等価減衰比} = (1/2) C_3 \omega_n / (K_2 + K_3) \quad (3-29)$$

(3-27)式は質量 M_1 および M_2 の振動変位の比 X_2 / X_1 が固有角振動数 ω_n , 減衰比 ζ を持つ1自由度振動系になることを示している。この解析に従い上記装置の実験において、周波数応答 X_2 / X_1 の測定結果から ω_n と ζ の値を読取れば、ブラケットばね剛性 K_2 およびテーブル部の質量 M_2 は常に一定で、その値は別途測定できるものであるから(3-28)式と(3-29)式を用いて案内

面の等価ばね剛性 K_3 と等価減衰係数 C_3 を送り駆動装置の等価動特性 K_1, C_1 に全く影響されることなく測定できる。

以上の測定原理に従って X_2/X_1 の周波数応答を複素平面上の軌跡に表示し、3.2.2 節の(iii)と同様の方法のバンド幅法により等価減衰比 ζ を求め、(3-28)式と(3-29)式から誘導される次式を用いて案内結合部の等価ばね剛性 K_3 と等価減衰係数 C_3 を求める。

$$K_3 = M_2 \omega_n^2 - K_2 \quad (3-30)$$

$$C_3 = 2 \zeta M_2 \omega_n \quad (3-31)$$

(IV) すべりおよび静圧案内面における等価ばね剛性および等価減衰係数の実験結果

以上の測定方法により2種のすべり案内面および静圧案内面を用いて種々のテーブル送り速度 V (mm/min) に対して等価減衰比 ζ 、共振振動数 ω_n (Hz) を測定し、これより計算で求めた等価減衰係数 C_3 (kg·s/cm)、等価ばね剛性

($k_2 + k_3$) (kg/cm)

を図3-44に示す。

これよりわかるよう

に、すべり案内面では

テーブル加振速度

振幅 $|\dot{X}_2|$ (この場

合には 430 mm/min)

よりも低い送り速度

領域になるとおおよ

び C_3 は急激に増大

していることがわか

る。これに反し、静

圧案内面では、 C_3

は V に関係なくほ

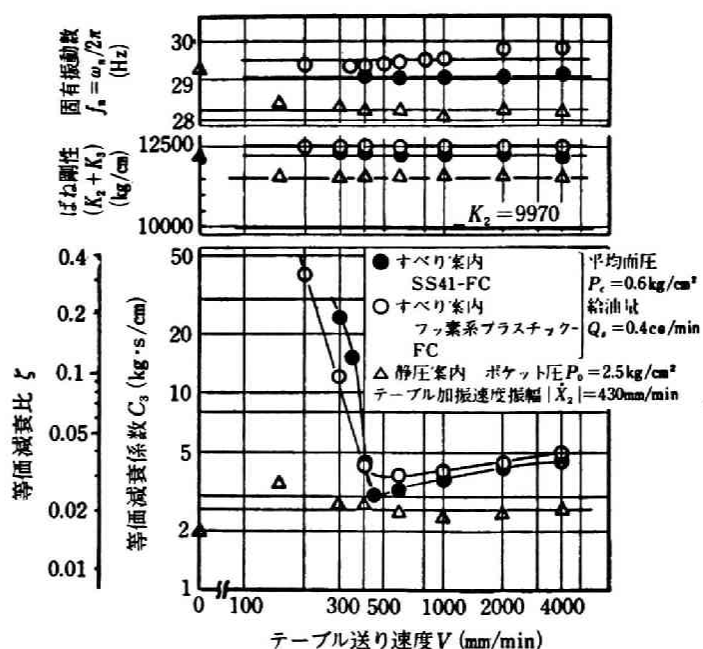


図3-44 各種案内面における送り速度 V と等価減衰比 ζ 、等価減衰係数 C_3 およびばね剛性 ($K_2 + K_3$)、固有振動数 f_n との関係 (ブラケットばね剛性 $K_2 = 9970 \text{ kg/cm}$)

一定値を示す。また共振振動数 ω_n および等価ばね剛性 $(k_2 + k_3)$ はテーブル送り速度に関係なくほぼ一定値を示すが、案内面の種類によって明確な差異を示している。

測定された $(k_2 + k_3)$ の値から別途に実測したブラケットばねの剛性 k_2 を差し引き案内面の送り方向の等価ばね剛性 k_3 を求めたが、その値はフッ素系プラスチックすべり面、SS41すべり面、静圧案内面の順となり、それぞれ 2500 kg/cm 、 2000 kg/cm 、 1500 kg/cm の平均値が得られた。これらの k_3 の値はブラケットばねの剛性 k_2 を 6400 kg/cm 、 9970 kg/cm 、 5500 kg/cm に変化させても有意な差は見られなかった。

静圧案内面ではポケット圧力 P_0 を $2 \pm 0.5 \text{ kg/cm}^2$ すきま h を $20 \pm 10 \mu\text{m}$ の範囲に変化させても等価減衰係数に差異はなく平均 $2.4 \text{ kg} \cdot \text{s/cm}$ と求まった。

(V) 工作機械テーブル案内面の剛性および減衰能の電子計算機プログラムによるシミュレーション

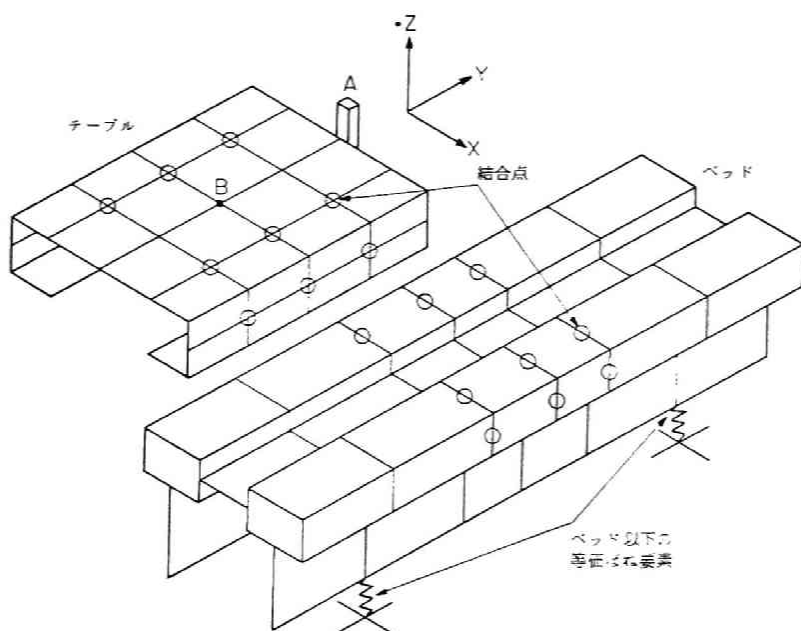


図3-45 工作機械テーブル案内面の計算機シミュレーションのための数学モデル

図 3-45 はこの工作機械テーブル案内面モデルの電子計算機プログラムによるシミュレーションのための数学モデルを示している。動剛性合成法電子計算機プログラムを用いてこのモデルの振動特性を解析するためにテーブルを48枚の長方形平板要素で、テーブル加振のためのブラケットばねをはり要素でモデル化した。ベッドは12本のはり要素と18枚の長方形平板要素およびベッドより下部の支持部の等価剛性を4個所のばね要素でモデル化した。テーブル部とベッド部はそれぞれ1つの部分構造として、この2つの部分構造の動剛性を案内接合部の等価なばね要素と減衰要素で表わされる柔結合部要素の動剛性を用いて合成し、この振動系全体の特性を求めた。柔結合部以外は、設計図面からモデル化のための各構造要素の形状を決定し、テーブルとベッドの減衰比は鋳鉄の材料内部減衰比として $\zeta = 0.0007$ を用いた。柔結合部の等価ばね剛性および減衰係数は本節で述べた測定結果より得られた値を使用した。

その1例として図 3-46 に、静圧案内の場合において図 3-43 でのA点のY方向加振に対するテーブル上のB点のY方向変位 X_2 に関するリセプタンスの周波数応答を示す。また静圧案内面での動剛性が大きな働きをもつと考えられる15.4 Hzの共振モードにおけるベクトル線図を図中に示している。

(VI) まとめ

実際の工作機械案内面の振動減衰能を送り駆動部の動特性に影響されことなく、案内面のみの値として精度よく測定できる新しい原理と方法を述べ、この方法によって軟鋼およびフッ素系プラスチックの2種のすべり案内面と静圧案内面について減衰能を測定し、案内面の送り方向等価ばねおよび等価減衰係数を求めた。さらにこの案内面の実験モデルの計算機シミュレーションを行い、実験により得られた案内面の等価ばねおよび等価減衰係数を用いて振動特性を計算した。

3.3.4 結 言

実機における結合部の動的剛性および減衰能の解析として、動圧軸受部をもつホイールヘッド主軸の振動特性の解析と、工作機械テーブル案内面での振動特

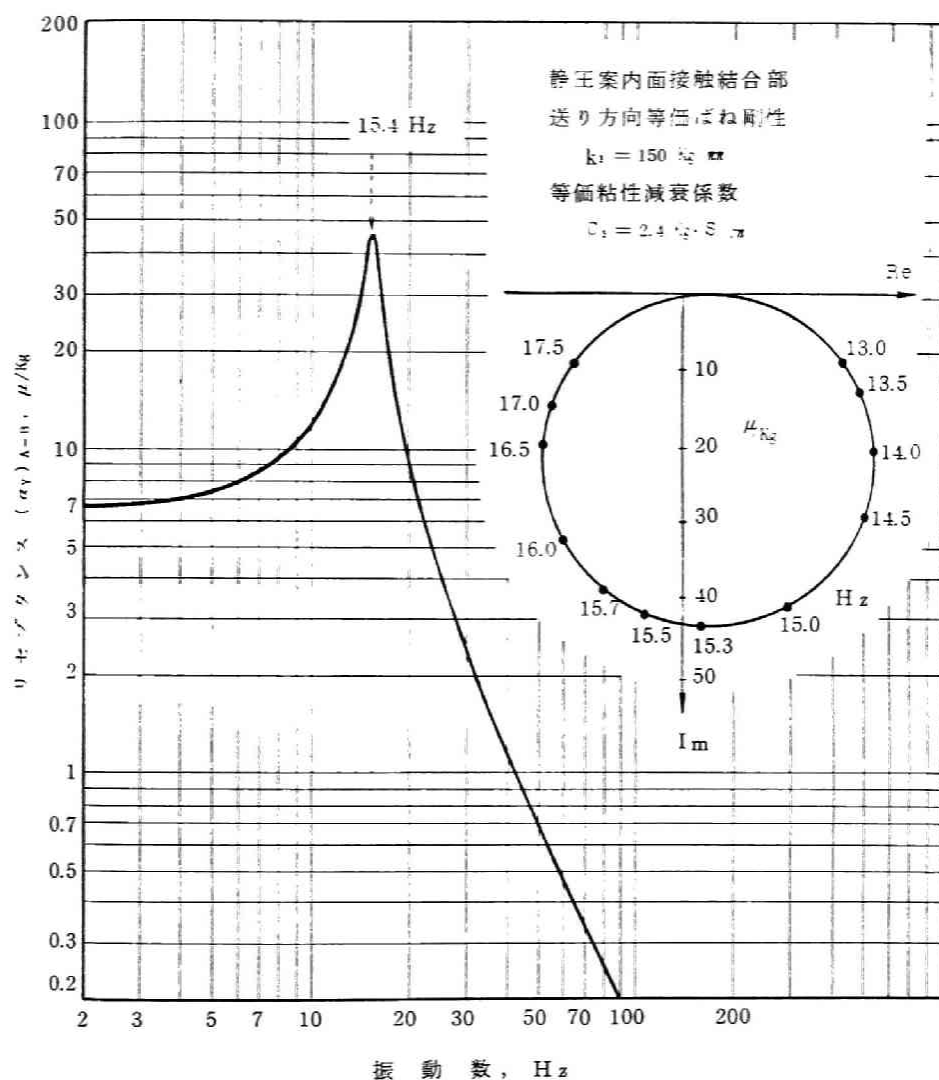


図 3-46 テーブル案内面シミュレーションモデル (図 3-43) の A 点の Y 方向の加振力 F に対するテーブル上 B 点の Y 方向の変位 Y_2 に関するリセプタンス $(\alpha_Y)_{A-B}$ および 15.4 Hz の共振モードにおけるベクトル線図

性における減衰能の解析の結果を述べた。

理論計算より得られた軸受部等価剛性を用いてホイールヘッド主軸受の計算機シミュレーションは実験ともよく一致しており、計算機シミュレーションの結果より設計変更等の指針が得られるものとする。

一方、工作機械案内面の減衰能の新しい測定法により、すべりおよび静圧案内での結合部等価剛性および減衰係数を正確に求めることができ、CADのためのデータを得ることができた。

実際の機械における結合部の振動特性を正確に把握し、設計に適用できるものとするには、本章第2節で述べた単純化モデルによる現象の正確な解析と本節の実機での解析が相俟って始めて可能になるものとする。

第 4 節 構造部材の剛性の評価法

3.4.1 緒 言

機械システムを構成する構造部材の剛性を正しく評価解析することは、種々の結合部の解析とともに機械構造の静剛性および振動特性を解析する場合の重要な課題である。現在、構造部材の静剛性および振動特性を測定および計算機シミュレーションにより解析することは容易なものとなっており、この方面についての研究^{3-16), 3-17), 3-18), 3-19)}が広く行なわれている。また形状が種々変化した場合の便宜的な解析例が示されており、構造部材の剛性の評価の問題は測定および計算機シミュレーション技術の向上とあいまって実用の段階に到っている筈がある。

しかし、このようにして得られた結果が、目的である機械構造全体の静剛性および振動特性の解析に結びつくことが必要であるにもかかわらず、第 1 章第 2 節に述べた問題提起に関する考慮がなされていないために、各研究者が設定した実験および計算状態にのみあてはまる結果に止まっている場合が多いように考えられる。

本節は、このような背景のもとにまず構造部材の剛性の評価における問題点を考察し、この問題点を解決するために、構造部材の剛性の新しい評価法および複雑形状部材を多数の等価剛性はりに置き換える方法について述べる。

3.4.2 構造部材の剛性の評価における問題点

機械構造を構成する 1 つの構造部材の剛性を評価する問題点を、その評価が最も困難なねじり剛性を例として以下に考察する。

- ① 図 3-47 は門型の工作機械の 1 つのコラム部付近を抜き出して示している。今剛性の評価を行なう着目する部材をコラム部とすると、これに接続する他の部材として、オーバーアーム、クロスシールおよびベッドがあり、これらの部材を通して、機械系に加えられる静的な外力または振動力がこのコ

ラム部に伝達される。そこでコラム部のねじり剛性に着目すると、このコラム部に他の部材を通して M_1 、 M_2 および M_3 なるねじりモーメント力が加わる。するとそのコラム部が開口部、エンドプレート等をもたない一様断面部材でない限り、 M_1 、 M_2 、 M_3 が静的な力の場合においても、その外力の加わる点および外力の数等により等価なねじり抵抗係数が異なる。また M_1 、 M_2 および M_3 のコラム部での外力が振動力の場合には、それらの外力は振動数 ω の関数であり、コラム部に加わる外力は $\{M_1, M_2, M_3, \omega\}$ の集合として表わせる。そし

てこれらの種々の値によって、コラム部の挙動はまったく異なり、コラム部の剛性を1つの剛性の値（もしくは1本のはりの剛性）で評価したのでは正確な対応が得られない。したがって1つの構造部材において、開口部、しきり板、エンドプレートおよびリブの影響を1つの外力の加わり方に対して比較評価してもそれは汎用性のある一般論ではなく、実験および計算を行っているモデルだけの結論でしかないと考えられる。ゆえに、1つの構造部材の剛性の解析が機械システムとして構成された場合の剛性の評価に結びつくためには、通常の評価解析法では不十分である。

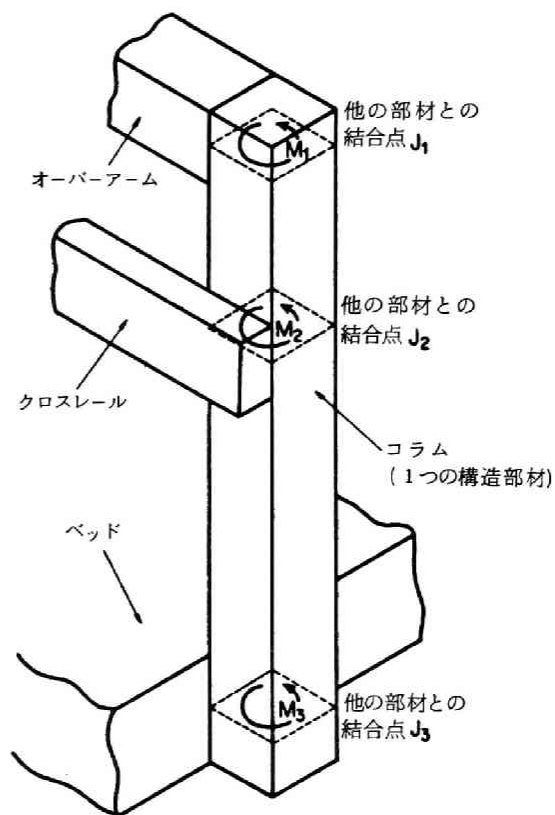


図 3-47 工作機械の中のコラム部に加わるねじり力の説明図

2 目的とする構造部材にある外力 F が加わった状態の剛性の評価をする場合、入力を外力 F とし、出力をある点の変位 X としてその間の関係 $F = kX$ の k を剛性とみなすことが通常行なわれている。これは構造部材が単純な形状の場合は妥当であるが、ここで対象としている実際の機械での複雑な形状をもつ部材においては変位 X をどのようにとるかによって剛性 k の値が変化する。特に等価なねじり変形の回転角を求めることは部材が複雑に変形すると困難になる。したがってその評価法として物理的な意味が明確で汎用性のある手法が必要である。

以上考察した構造部材の剛性の評価における②の問題点に対する解答として 3.4.3 節にエネルギー値を用いて等価剛性を求める方法、そして①の問題点に対する解答として 3.4.4 節に複雑形状部材を多数の等価剛性はりの集合に置き換える手法を述べる。

3.4.3 構造部材のねじり剛性評価法

図 3-48 は計算機シミュレーションより得られるエネルギー値を用いて等価なねじり剛性を求め、さらに同一形状の実験モデルによりねじり剛性を測定した側壁に開口部をもつ中空の $100\text{ mm} \times 100\text{ mm}$ 正方形断面コラム状部材を示している。この実験モデルは鋳鉄製であり、板の厚さは 5 mm 、部材の長さが 900 mm 、そして開口部の幅が 20 mm でこの開口部の長さ x が種々のものを作った。そこでこのコラム状部材の下端を固定し、上端にねじりモーメントを加える場合のねじり剛性の評価を計算機シミュレーションと実験の両者で行なった。

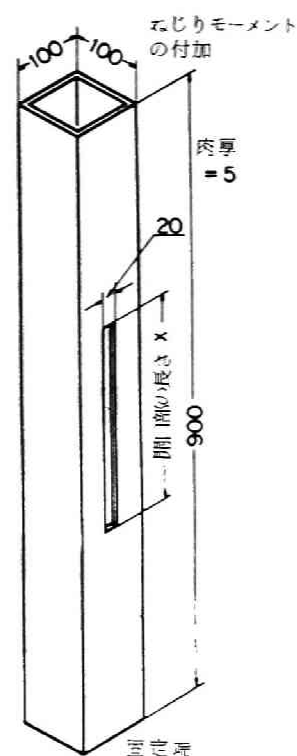


図 3-48 コラム状部材の実験および計算モデル

(i) 計算機シミュレーションより求まるエネルギー値を用いて等価剛性を求める方法

図3-49は、図3-48のコラム状部材のうち開口部の長さ x が300mmの場合の電子計算機プログラムによるシミュレーションモデルを示している。このモデルのねじり変形に対する静剛性を動剛性合成法電子計算機プログラムシステムを用いて計算した。ここで行う計算ではコラムモデルを1つの部分構造として計算し、部分構造間の動剛性の合成は行っていない。図3-49に見るようにコラム状部材を80枚の長方形平板要素でモデル化し、この部材の上端のM, I, JおよびK点に $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1 \text{ kg}$ の静的な力を図に示す方向に付加し、結局 $20 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ のねじりモーメントを等価に加える場合を想定する。計算より得られるモデル系全体の復元エネルギー V_A は $V_A = 1.01 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{cm}$ であった。このときこの部材の長さを ℓ 、横弾性係数を G 、そして等価ねじり抵抗係数を J_A とすると、モデル系全体に貯えられる復元エネルギー V_A は

$$V_A = \frac{\ell M^2}{2 G J_A} \quad (3-32)$$

として定まることより、等価ねじり抵抗係数 J_A は

$$J_A = \frac{\ell M^2}{2 G V_A} \quad (3-33)$$

として求まる。この(3-33)式に $M = 20 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ $\ell = 900 \text{ mm}$, $G = 5158.7 \text{ kg/mm}^2$ および $V_A = 1.01 \times 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{cm}$ を代入して等価ねじり抵抗係数は J_A

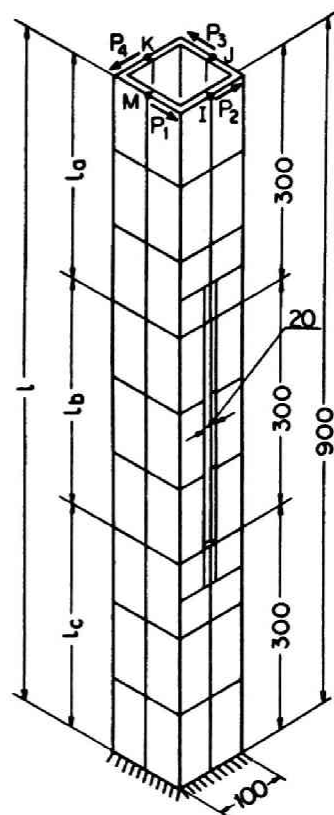


図3-49 計算機シミュレーションのためのモデル化

$= 345.5 \text{ cm}^4$ として計算される。

このようにして静剛性の計算より得られるエネルギー値をもちいて等価ねじり抵抗係数を正確に求めることができる。また上端にねじりモーメントが加わる場合だけでなく、任意の点に加わる場合にも同様に求まる。さらにねじりモーメントだけでなく、曲げ力に対しても同様な方法により等価剛性を計算できる。

以上に述べたエネルギー値を用いて等価剛性を求める方法により計算した、開口部の長さ x の種々の場合の等価ねじり抵抗係数の値を図3-50の破線に示している。この図において縦軸は側壁の開口部の長さを、横軸は等価ねじり抵抗係数を示している。

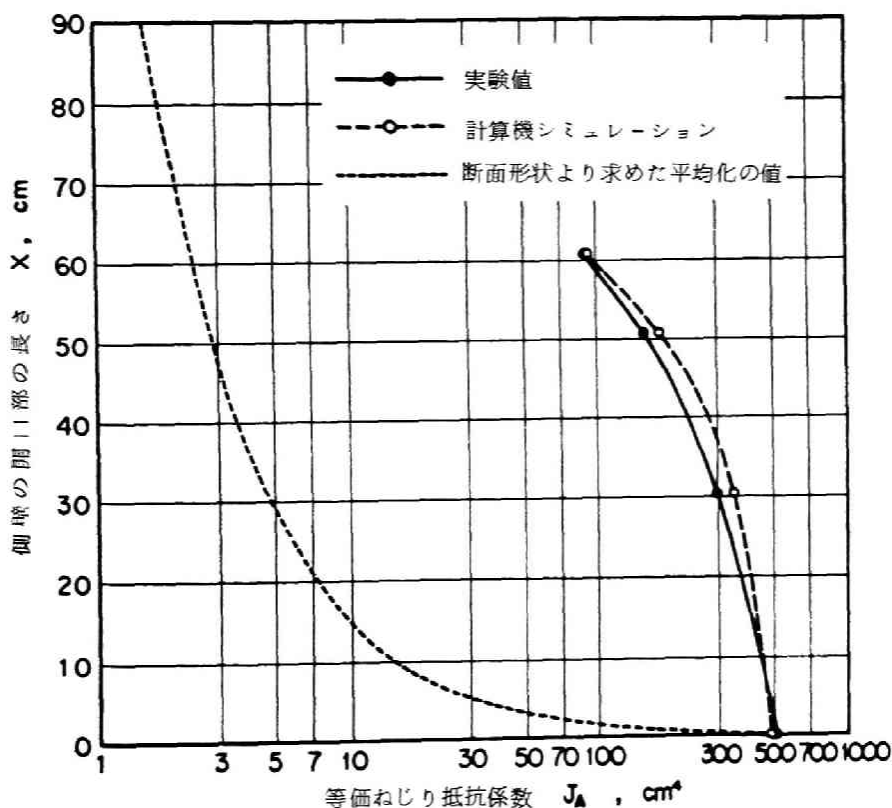


図3-50 コラム状部材の側壁の開口部の長さが変化したときの等価ねじり抵抗係数の比較

(ii) 実験によるねじり剛性の測定

図 3-51 は、図 3-48 におけるコラム状部材のねじり剛性の測定装置を示している。まずコラム状部材の一端を旋盤のチャックの爪で固定し、他端を

心押台を貫通する丸棒につけた爪でつかんだ。そしてその丸棒の先端に腕を取り付けて、その腕の端に荷重をかけ、コラム状部材の他端に静的なねじりモーメントを加えた。心押

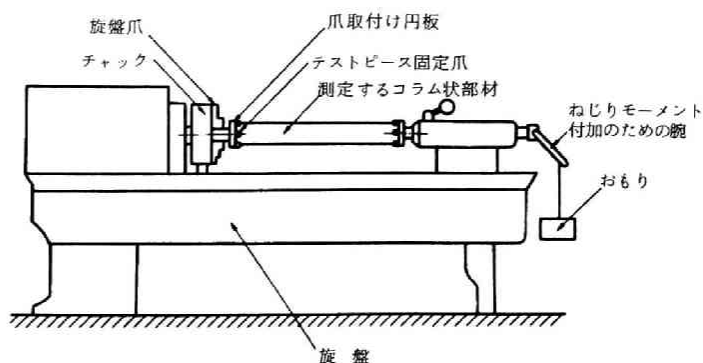


図 3-51 コラム状部材のねじり剛性測定装置

台を貫通する丸棒は軸方向の拘束をしていない。したがってそり拘束ねじりの影響は無視できると思われる。また、ねじり変形の回転角を測定するには図 3-52 に示すようにコラム部材の側面に角棒をたて B₁ 点および B₂ 点で角棒に垂直に 2 個のダイヤルゲージをセットし、各々のダイヤルゲージ測定子が角棒と接触する 2 つの点を通る線は部材の断面の中心を通るようにした。いま、B₁ 点のダイヤルゲージの読みを D_{B1}、B₂ 点のダイヤルゲージの読みを D_{B2} とすれば、ねじり角 ϕ は

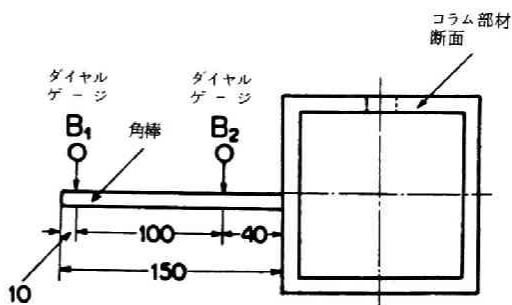


図 3-52 回転変位測定のための実験装置

$$\phi = \frac{D_{B1} - D_{B2}}{100} \text{ [rad]} \quad (3-34)$$

となり、ねじりモーメント M、部材の固定端から回転角測定点までの長さ l お

よびこの部材材料の横弾性係数 G より、等価ねじり抵抗係数 J は

$$J = \frac{M \ell}{G \phi} \quad (3-35)$$

として求まる。このようにして求めた種々の開口部の長さをもつコラム状部材の等価ねじり抵抗係数の測定結果を図 3-50 の実線で示す。

図 3-50 より計算機シミュレーションより求まるエネルギー値を用いて等価剛性を求めた結果は実験結果とよく一致しており、この手法が有効なことがわかる。また図 3-50 の点線は、コラム状部材の断面形状より求まるねじり抵抗係数を同一形状の断面をもつ部材の長さを重みとして平均した結果を示している。たとえば図 3-49 の開口部の長さが 300 mm の部材においては、閉断面である部材の長さは $\ell_c = 600 \text{ mm}$ で開口部の部分の開断面の長さが $\ell_o = 300 \text{ mm}$ で、それぞれの場合のねじり剛性を図 3-53 の説明により計算する。

(a)図は閉断面部の形状を示しておりこの場合の等価ねじり抵抗係数 J_c は

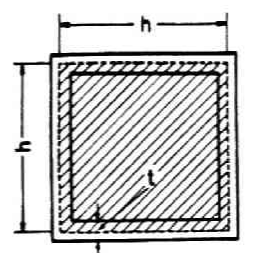
$$J_c = \frac{4}{3} h t^3 + \frac{4 F^2}{\int \frac{ds}{t}} \quad (3-36)$$

3-20)

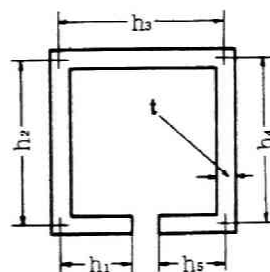
として求まる。ここで t は板の肉厚、 F は肉厚の 2 等分線（破線）によって囲まれた斜線の部分の面積、そして S は破線に沿う長さ方向を示している。(3-36) 式に各値を代入すると $J_c = 501.7 \text{ cm}^4$ と求まる。一方(b)図は開断面部の形状を示しており、等価ねじり抵抗係数 J_o は

$$J_o = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^5 h_i t^3 \quad (3-37)$$

として求まる。³⁻²⁰⁾ ここで h_i は断面の各辺



(a) 閉断面



(b) 開断面

図 3-53 閉断面および開断面部の等価ねじり剛性の計算の説明図

の長さであり、それぞれの値を入れると $J_0 = 1.583 \text{ cm}^4$ と計算される。

これより、コラム部材の一端を固定し他端にねじりモーメントを加えた場合の等価ねじり抵抗係数 J_A は

$$J_A = \frac{\ell}{\frac{\ell_C}{J_C} + \frac{\ell_O}{J_O}} = 4.719 \text{ cm}^4 \quad (3-38)$$

となる。この方法により求めた図 3-50 の点線で示す値は、開口部が存在する範囲において実験値から大きくはずれる。したがって開口部をもつ部材のねじり剛性の評価はこの方法では妥当でないことがわかる。

3.4.4 複雑形状部材の多数の等価剛性はりへの置換え

(i) 構造部材を等価な剛性をもつものに置き換える必要性

機械システム全体の解析に結びつく構造部材の等価な剛性への置換えは、

3.4.2 節の(1)の問題点に対する解決をあたえるだけでなく、次に示すような要求がある。

(イ) 機械構造全体を形状に忠実に有限要素等でモデル化すると、振動特性を計算するのに膨大な計算時間を要す。このため必要十分な精度をもつ目的とする特性が得られる範囲内でなるべく簡単な構造のものに等価に置換えることが必要である。

(ロ) 最適設計を実行するには、特性の繰り返し計算にさらに膨大な計算時間を要する。また、設計変更において妥当な設計変数を選ぶには、その剛性をなんらかの形で単純なものに置き換えて評価したデータの蓄積が必要である。

(ii) 複雑形状部材を多数の等価剛性はりに置き換える方法

まず、目的とする部材をできるだけ形状に忠実に、板、はりその他の構造要素でモデル化する。いま、図 3-54 のコラム状モデルのねじり剛性に関する置換えを例として考える。このコラム状モデルに対するシミュレーションモデルの下端 B を固定し、上端 A に静的なねじりモーメント M が加わるとして、

そのとき各構造要素に貯えられる復元エネルギーを計算する。そこで、はり要素に置き換えようとする CD 間の長さ l_s の部分に着目すると、その C 点および D 点に相反するねじりモーメント M が加わっていると考えられる。その CD 間の板、はりその他の構造要素に貯えられる復元エネルギーの和を V_{ls} とし、 G をこの部材の材料の横弾性係数とすると、CD 間の等価ねじり抵抗係数 J_{ls} は、

$$J_{ls} = \frac{1}{2} \frac{M^2}{V_{ls}} \frac{l_s}{G} \quad (3-39)$$

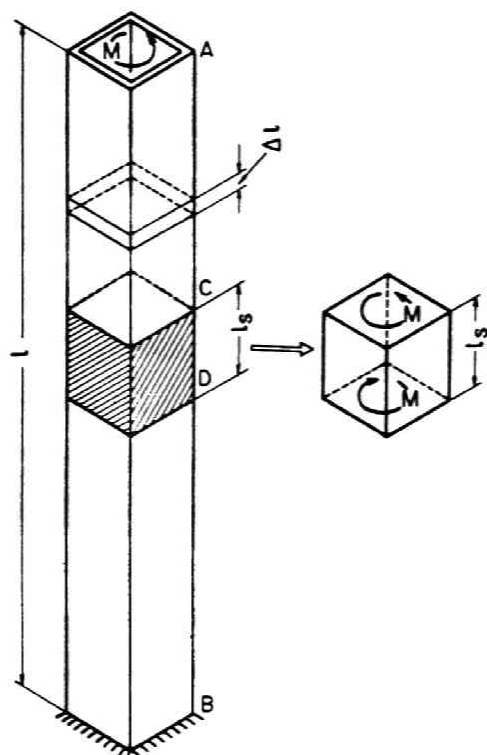


図 3-54 はり要素への置換えの説明図

として求まる。つまり、A 点にねじりモーメントを加えるときの復元エネルギー分布を計算し、そして単位長さ Δl 当りの復元エネルギー分布を調べ、その値がほぼ同一である区間を (3-39) 式より求まる等価ねじり抵抗係数 J_{ls} をもつ長さ l_s の 1 本の一様断面のはりとする。このようにして復元エネルギー分布が異なるところを異なる等価ねじり抵抗係数をもつはりとみなし構造部材を多数のはり要素に置き換える。

以上は剛性についての置換えであるが、慣性については、質量分布がほぼ均一なところを 1 本のはりとみなす。実際には剛性と質量の 2 つの分布の様子を勘案して、分割するはり要素の数を決定する。

(Ⅲ) 解析例

図 3-55 は、図 3-49 と同じ開口部の総の長さが 300 mm の場合のコラム状モデルの等価ねじり剛性はりへの置換えを示している。このコラム状部

材におけるシミュレーションモデルの上端でのM, I, J およびK点に $P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 1 \text{ kg}$ の静的な力を付加し、結局 $20 \text{ kg} \cdot \text{cm}$ のねじりモーメントを等価に加えている。そして復元エネルギー分布を求め、その分布の状態が同一な区間を1本の一様断面のはりに置き換える。図3-55の左側にこのようにして等価なはり要素に置き換えた場合の各はり要素のねじり抵抗係数を示している。たとえば、はり要素3の区間では、この区間の構造要素に貯えられる復元エネルギーの和は $V_{\ell_3} = 1.82 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{cm}$ であり、(3-39)式にこの区間の長さ $\ell_3 = 100 \text{ mm}$, $M = 20 \text{ kg} \cdot \text{cm}$, および $G = 5158.7 \text{ kg/mm}$ を代入して、この区間の等価ねじり抵抗係数が $J_{\ell_3} = 213.3 \text{ cm}^4$ として求まる。このようにして、構造部材を多くのはり要素に置き換えると、この構造部材に他の部材から任意の力が任意の点に加わっても正しい剛性の解析ができると思われる。

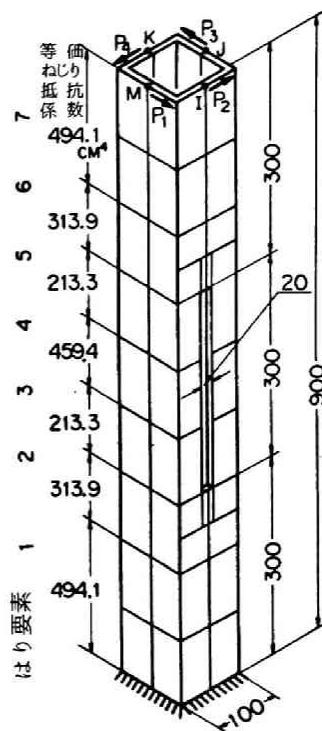


図3-55 開口部長さ300mmの場合の等価ねじり剛性とはり要素への置換え

また構造部材のモデル化として、要素の分割をもっとこまかくすることにより、さらに精度の高い置換えができる。そして振動特性の解析のための質量分布の置換えは、図3-55の例では断面形状の変化をそのまま異なるはりとすればよい。

3.4.5 結 言

構造部材の剛性をより正確に把握し、その評価が機械構造全体の解析に結びつくために、まず問題点を明らかにし、それを解決する方法として、計算機シミュレーションにより求まるエネルギー値を用いて構造部材の剛性を評価する方

法について述べ、そして従来剛性の評価が最も困難なねじり剛性についてコラム状部材を例として実験による測定と合せて解析例を示した。次に、同じくエネルギー分布の解析より複雑形状部材を多数の等価剛性はりへ置き換える手法を述べ例を示した。

ここで述べた手法を用いることにより機械構造全体の静剛性および振動特性の解析がより正確なものになると考えられる。また等価な剛性をもつものへの妥当な置換えは最適設計を行う上で大きな役割をするものであると思われる。

第 5 節 結 論

第Ⅰ章第 2 節で述べた解析の基本原則に基づき、機械要素または構造部材を接合する種々の結合部の動的剛性と減衰能の解析および構造部材の剛性の評価法の解析を行った。これらの解析により従来曖昧かつ混乱した解析結果しか発表されていなかった機械構造の構成要素の解析がより正確に行えるようになったと考えられる。また本章に考案したこれらの解析方法は第Ⅱ章の電子計算機プログラムによる静剛性および振動特性の解析に対する入力データを与えるばかりでなく、第Ⅳ章の最適設計および第Ⅴ章の実動状態の振動特性の解析をより有効なものにするものである。

第Ⅳ章 工作機械の振動特性に関する最適設計

第 1 節 緒 論

機械構造物の振動特性を解析する究極の目的の1つは、その振動特性に関する最適な設計を実現することにある。Ⅰ章で解析した振動特性評価の基本原則および工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原則に基づき、そしてⅡ章で開発した電子計算機プログラムによる構造物の静剛性および振動特性解析法を用いて、本章においては工作機械のびびり振動の防止に関する最適設計を行う手法を述べる。

現在までに構造物の最適設計に関する研究が多く発表されているが、その多くは静剛性に対する解析である。振動特性に対する最適設計を扱った一連の研究としては、J. E. Taylor^{4-1), 4-2)}, M. J. Turner⁴⁻³⁾, W. Prager⁴⁻⁴⁾, F. I. Niordson⁴⁻⁵⁾, Icerman⁴⁻⁶⁾等に始まり、D. L. Sippel⁴⁻⁷⁾, E. F. Masur⁴⁻⁸⁾, 奥村⁴⁻⁹⁾等に受け継がれている。これらの研究は、モデルとして単純な片持ちはりを用いて、その1次の固有振動数を一定にした時の最小重量設計または重量を一定にした時の1次の固有振動数を最大にする問題を扱っているにすぎない。そこで、第Ⅰ章に解析した最適化設計の基本原則を実行するにはこれらの研究とは別の観点にたった最適化設計法を開発する必要がある。

このような最適化の問題を解く数学的な方法として、(i)線形計画法、(ii)最小2乗法、(iii)ニュートン-ラプソン法等があるが、これらの解析的な方法によって解が求まるのは単純な問題または特殊な問題の場合であり、Ⅰ章で示した最適設計を実行するには極値探索の方法によらなければならない。この極値探索の方法として、(a)1次元探索法および(b)多次元探索法があるが、ここで問題とする最適設計に使用できるのは多次元探索法である。この数理的な多次元探索法として、(c)最急傾斜法、(d)シンプレックス法、(e)コンプレックス法、(f)共役傾斜法等があるが、これらを実行するには電子計算機プログラムを使用する必要がある。

しかし、電子計算機プログラムにより複雑な機械構造物の振動特性に関する最適化設計を実行する場合、振動特性としての性能解析に対し長い計算時間を要するため、最適化のための繰り返し計算を行おうとすると全体では膨大な計算時間を必要とする。したがって単純に数理的な最適化の技法を応用しても、実際の機械に対して適用した場合実用性からほど遠いものとなる。また長大な計算の結果もし解が得られたとしても、それがどんな物理的な意味をもつかを理解することが必要であり、かつ真の最適点であるという保証を得ることは難しい場合が多い。そこで振動の現象および特性を明確化した上で、それを応用した技法を開発することが必要である。

本章では、このような研究の背景を踏まえ工作機械の再生型自励びりの防止を目的とする最適設計を行う手法とその適用例を以下の節に述べる。まず、4.2節では1.3節の原理にのっとり、最適化設計の第1段階として、工作機械の切削点での工具と品物の間の相対リセプタンスにおけるモーダルフレキシビリティの最大値をもつ1つの固有モードに着目し、その固有モードのエネルギー分布により設計変更を行いそのモーダルフレキシビリティを下げ、そして静コンプライアンスが多く固有モードのモーダルフレキシビリティにできるだけ一様に分布するような最適化設計の手法と適用例を述べる。次に4.3節では、以上の手法をさらに有効なものにするに、単に1つの固有モードだけでなく、1度に複数の固有モードに着目してその固有モード間のモーダルフレキシビリティのバランスをとり、そして設計変更の最終段階において数理的探索法を適用して最適点を決定する手法を述べ、適用例によりその有効性を実証する。

第 2 節 単一の固有モードに着目した場合の振動特性の改善 および最適化設計

4.2.1 緒 言

機械構造物の振動特性に関する最適設計の 1 つとして、再生型自励びり振動を生じにくい工作機械を設計することを目的とする最適化設計の手法を述べる。この手法はⅠ章 1.3 節に述べた工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原則に基づいており、その第 1 段階の最適設計法として加工を行う切削点での工具と品物の間の切削力方向の相対加振力と切削面に垂直な方向の相対変位に関する相対リセプタンスの周波数応答において、すべての振動数範囲にわたる固有モードのうち、そのモーダルフレキシビリティの値が最大となる 1 つの固有モードのモーダルフレキシビリティを下げ、そして各固有モードのモーダルフレキシビリティの分布ができるだけ一様になるよう設計変更を行う。

まず、この手法をⅡ章において開発した電子計算機プログラムシステムを用いて実行する場合の手順と手法を述べ、そしてその手法の実際構造に対する適用例を実験による確認と並行して示し、手法の有効性を実証する。

4.2.2 電子計算機プログラムによる最適化設計の手順

切削力方向の相対加振力と切削面に垂直な方向の相対変位に関する問題となる 1 つの固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m を下げ、静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s を多くの固有モードに関して一様にするという目的に従って最適化設計を実行する場合の電子計算機プログラムのアルゴリズムを図 4-1 に示す。

現存する機械に対して最適化設計を行う場合を想定すると、その手順は次のごとくである。まず、その設計図面より構造物をⅡ章に述べた手法に従ってモデル化しシミュレーションする。そのシミュレーションモデルに対して工具と品物の間の切削力方向の相対加振力と切削面に垂直な方向の相対変位に関する静コンプライアンス f_s を計算する。次に工具と品物の間の相対リセプタンス

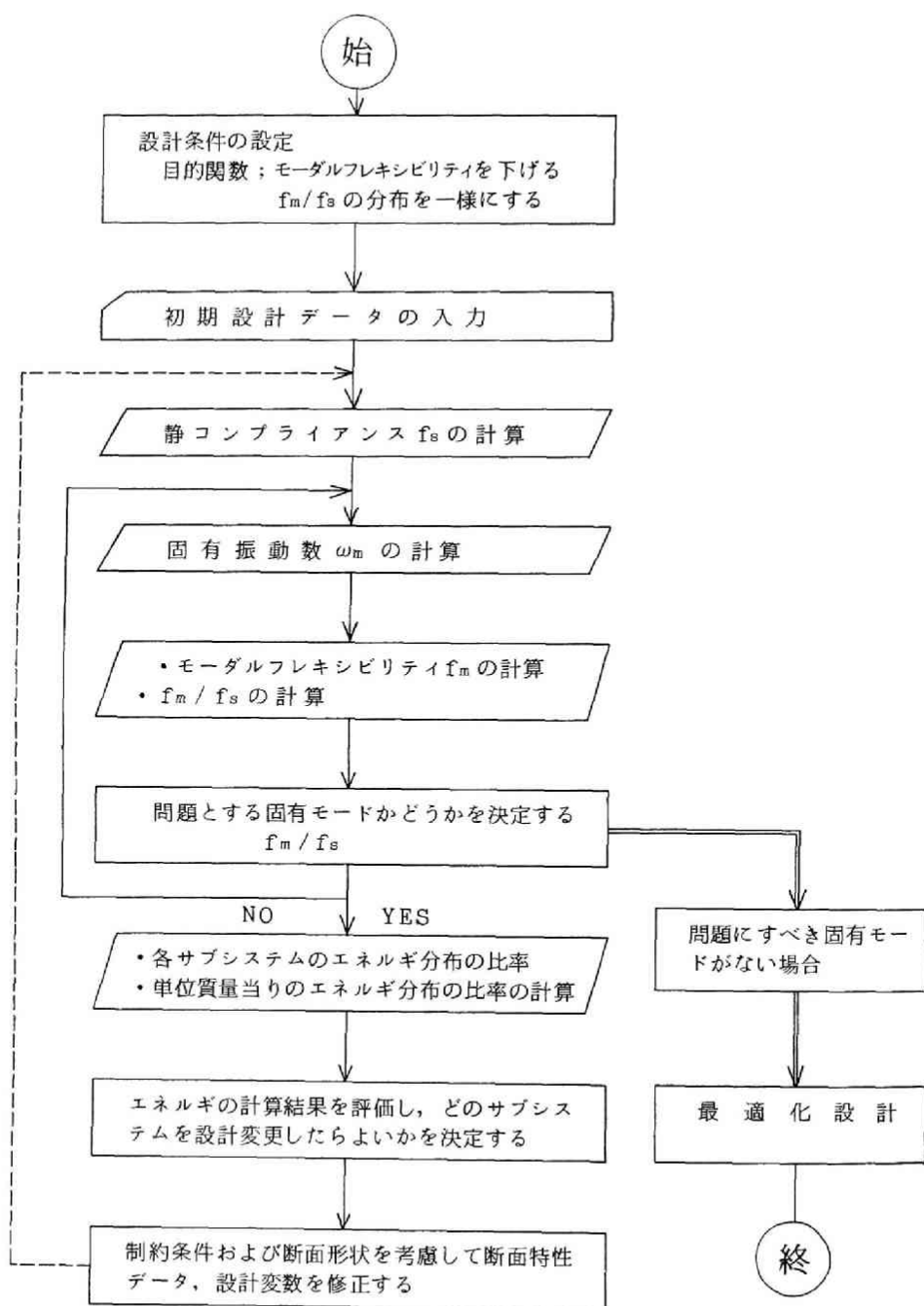


図 4-1 エネルギーバランスによる最適化設計の電子計算機プログラムのアルゴリズム

の周波数応答より共振振動数 ω_m を低次のモードより順に求める。その各固有モードでの工具の品物の間の切削力方向と切削面に垂直な方向の相対変位に関するモーダルフレキシビリティ f_m をⅡ章の手法により求め、静コンプライアンスに対する比 f_m/f_s を計算する。これより f_m/f_s の大きな値をもつ固有モードを見つけるわけであるが、今 n 次までの固有モードの共振振動数およびモーダルフレキシビリティを計算したとする。すると、 n 次までの固有モードのモーダルフレキシビリティ f_p の和は $\sum_{p=1}^n f_p$ と表わせる。この値の静コンプライアンスに対する差 f_e は、(4-77)式より、

$$f_s - \sum_{p=1}^n f_p = f_e \quad (4-1)$$

と求めることができる。ここで計算を行った n 次までの固有モードのモーダルフレキシビリティのうちの最も大きな値を f_{\max} とする。このとき $f_{\max} > f_e$ ならば、 n 次以後の高次においては、 f_{\max} より大きいモーダルフレキシビリティの値をもつ固有モードは存在しないことが言える。一方、 n 次モードに関して計算を行う時点で $f_{\max} < f_e$ ならば、さらに高次の共振振動数を求める計算を続行し、そして $f_{\max} > f_e$ を満足した時に計算を終る。

次に、このようにして求まった最も大きいモーダルフレキシビリティ f_{\max} の値をもつ固有モードに対して、機械システム全体にわたる最大慣性エネルギーおよび最大復元エネルギー分布をⅡ章の手法に従い求める。この機械システムをモデル化した構造要素の種類により種々のエネルギーの分布の仕方があるが、 N 個のサブシステムまたは部分構造により構成されるシステム全体の最大慣性エネルギー T_{Am} および最大復元エネルギー V_{Am} に対するあるサブシステムまたは部分構造における最大慣性エネルギー T_{im} および最大復元エネルギー V_{im} の比をそれぞれ次の(4-2)式および(4-3)式の r_{1i} と μ_{1i} で表わし、これをエネルギー分布率と呼ぶ。

$$\sum_{i=1}^N \frac{T_{im}}{T_{Am}} = \sum_{i=1}^N r_{1i} = 1.0 \quad (4-2)$$

$$\sum_{i=1}^N \frac{V_{im}}{V_{Am}} = \sum_{i=1}^N \mu_{im} = 1.0 \quad (4-3)$$

次に、この各サブシステムまたは部分構造の質量を W_i とすると、機械システム全体の総質量 W_A は、

$$W_A = \sum_{i=1}^N W_i \quad (4-4)$$

となり、システム全体の単位質量当りの慣性エネルギー η_{Am}' および復元エネルギー τ_{Am}' は、

$$\frac{T_{Am}}{W_A} = \eta_{Am}' \quad (4-5)$$

$$\frac{V_{Am}}{W_A} = \tau_{Am}' \quad (4-6)$$

と表わせる。また、各サブシステムまたは部分構造の単位質量当りの慣性エネルギーおよび復元エネルギーは、

$$\frac{T_{im}}{W_i} = \eta_{im}'' \quad (4-7)$$

$$\frac{V_{im}}{W_i} = \tau_{im}'' \quad (4-8)$$

と表わせる。計算を行っている対象の機械システム全体が同一材料の部材で作られている場合は、単位質量当りのエネルギーは単位体積当りのエネルギーに対応する。ここでさらに、(4-5)式、(4-6)式、(4-7)式および(4-8)式より、単位質量当りのエネルギー分布比

$$\frac{\eta_{im}''}{\eta_{Am}'} = \eta_{im}''' \quad (4-9)$$

$$\frac{\tau_{im}''}{\tau_{Am}'} = \tau_{im}''' \quad (4-10)$$

を求める。 η_{im}''' および τ_{im}''' の値が各サブシステムおよび部分構造において

揃って1に近くなれば、慣性および復元エネルギーの分布がシステム全体にわたって一様化されていることになる。

今、あるサブシステムがはり要素でモデル化されている場合にはこのはり要素における曲げ、ねじり、および縦振動による各エネルギー分布率と単位質量当りのエネルギーをそれぞれ別個に求めることができる。また柔結合部においては復元エネルギー分布率を、集中質量要素においては慣性エネルギー分布率を、そして平板要素では各エネルギー分布率と単位質量当りのエネルギーを計算する。これよりエネルギー分布および単位質量当りのエネルギーが最も大きいサブシステムまたは部分構造を設計変更を要するサブシステムまたは部分構造とみなす。

各サブシステムまたは部分構造におけるエネルギー分布の集中に関して、おおまかに、(1)復元エネルギーのみが集中する、(2)慣性エネルギーのみが集中する、(3)復元エネルギーと慣性エネルギーの両方が集中する、の3つの場合が考えられる。そこで最適化設計を実行するに、(1)の場合にはそのサブシステムまたは部材の関連する座標方向の剛性を増大させる。(2)の場合には関連する座標方向の慣性（重量）を減少させる。そして(3)の場合には剛性を増大させ慣性を減少させるよう設計変更を行うが、実際問題として両者を満足する設計変更が不可能な場合は、より重要な方を選択する。

ここで、設計変更する部材がはり要素によるモデルの場合、その部材での曲げ、ねじりおよび縦振動による各変形に関し、剛性を支配する因子と慣性を支配する因子をあげれば、表4-1のごとくである。工作機械構造の最適化設計では、骨組および部材の長さがすでに決定されている場合が多く、また使用される材料も同一の場合がほとんどである。よって電子計算機プログラムシステムでは、まず断面形状のみをパラメータとして最適化を行っている。そして断面形状が中実円形断面、中実長方形（正方形も含む）断面、薄肉円筒断面、中空円形断面、箱型断面、I形断面およびコ形断面の各場合について、断面形状の変化に対する断面積 A 、断面2次モーメント I 、ねじり剛さ I_t 、および極慣性モーメント J の間の関係式をプログラム化しており 設計変更後の断面形状

を決定する。この設計変数（データ）を繰返し修正して最適化をはかっていく際の係数としては設計変数を1度に何%ずつ変更するかを指定入力するようにしている。

こうして新しい設計データが定まれば、図4-1中の破線に示す

ループをたどって同様の計算を繰返す。ここで設計変更後の設計変数が制約条件を満足しなくなれば、その次に問題となるサブシステムまたは部分構造のデータを設計変更する。これを繰返して問題とすべき固有モードがなくなれば最適化された設計が得られたとして計算を終る。

Ⅱ章に説明した振動特性を解析し評価する電子計算機プログラムに最適化設計の機能をもたせた本章で使用了プログラムシステムでは、以上の過程を自動的に計算機上で実行している。ただし、計算時間に制限がある場合は、最適化設計を得るまでに以上の計算過程を何回かに分けて行う必要がある。

4.2.3 最適化設計の適用例

リセプタンス合成法電子計算機プログラムシステムを用いて、図4-2に示す構造物に対して最適化設計を行った例を示す。これは内面研削盤に装備されるドレッシングユニットで高さ427 mm、重量54 kg、鋳鉄製の設計が提出され、その試作機も製作されている。この機械はアームの先端Aにダイヤモンドドレッサを取りつけ、研削砥石の表面をドレッシングするもので、ころがり軸受を用いたヒンジによりアームは上下に回転するようになっている。そしてドレ

表4-1 はり要素の剛性および慣性を支配する因子

	剛性に関する因子	慣性に関する因子
曲げ振動	材料の縦弾性係数 E 断面2次モーメント I はりの長さ l	材 料 の 密 度 ρ 断 面 積 A は り の 長 さ l
ねじり振動	材料の横弾性係数 G ね じ り 剛 さ I_p は り の 長 さ l	材 料 の 密 度 ρ 極慣性モーメント J は り の 長 さ l
縦振動	材料の縦弾性係数 E 断 面 積 A は り の 長 さ l	材 料 の 密 度 ρ 断 面 積 A は り の 長 さ l

シングを行うときには、アームは軸支えからのびたアームレストに支えられ、図示のような水平位置をとる。そこで解析のために、図4-3(a)に示すようなモデル化を行った。すなわち、試作設計では全

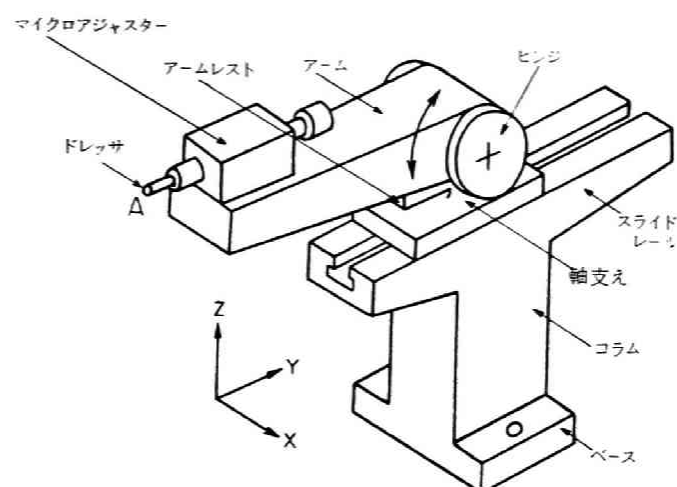


図4-2 ドレッシングユニットの概観図

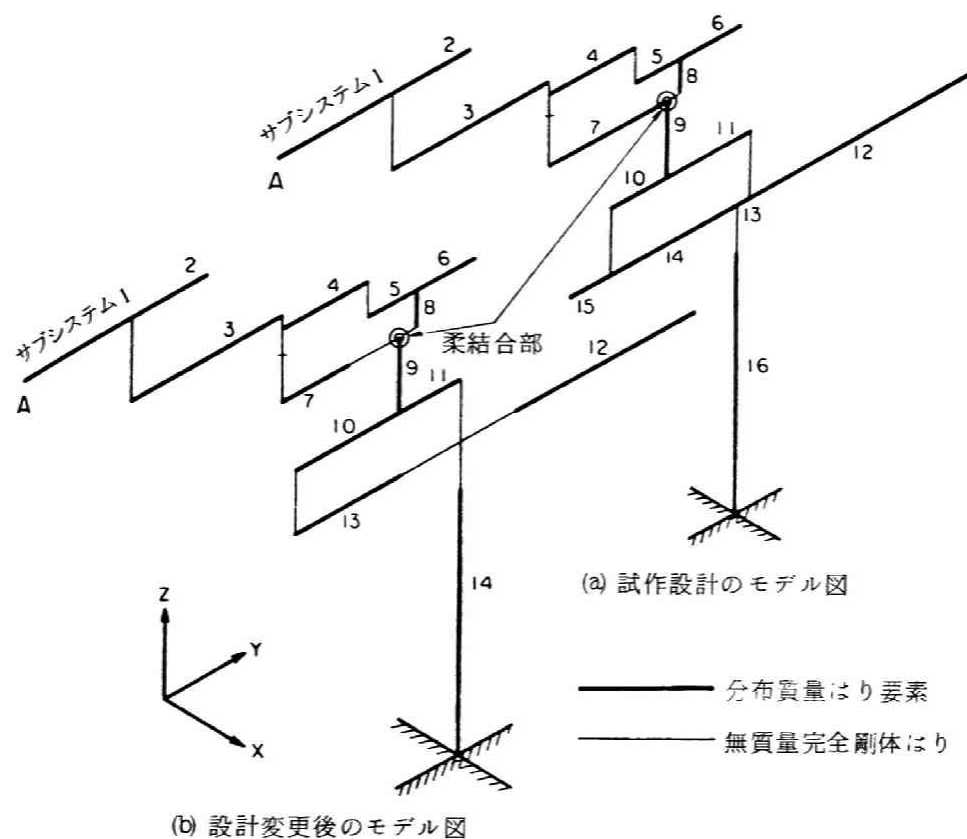


図4-3 ドレッシングユニットの計算モデル図

体を16個の分布質量をもつ一様断面のはり要素のサブシステムに分解し、またアームの回転部は、ころがり軸受の軸受剛性より求まる等価ばね要素で柔結合されているとした。そして、ドレッサ点Aに想定される6つの座標方向のリセプタンスの周波数応答を求めた。

この試作設計モデルのドレッサ点Aでの各座標方向の周波数応答のうち、Z軸方向加振によるZ軸方向変位のリセプタンスの周波数応答の実験値と計算値をそれぞれ図4

ー4および図4

ー5の実線で示

す。そして図4

ー6は、2つの

低次共振モード

におけるモード

形の計算値を表

わしている。こ

の計算値と実験

値は、共振振動

数およびモード

形の点からほぼ

対応がとれてい

た。さらに表4

ー2はこの試作

設計での3次ま

での共振モード

について、各固

有モードでのモ

ーダルフレキシ

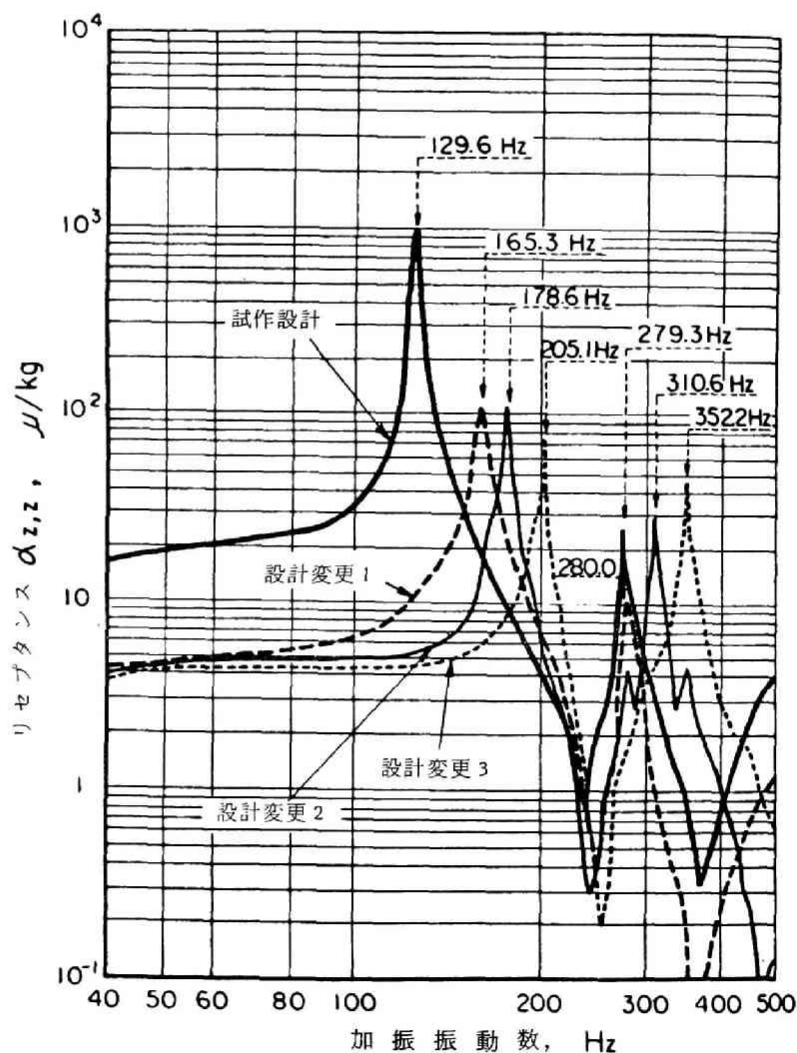


図4-4 ドレッサ点Aの周波数応答 $\alpha_{z,z}$ の実験値

ビリティとエネルギー分布の計算結果をまとめたものである。

この表において、いまZ軸方向のモーダルフレキシビリティに着目すると、1次の固有モードのモーダルフレキシビリティは $18.4 \mu/kg$ と最も大きく、またZ軸方向の静的なコンプライアンス $18.8 \mu/kg$ に対する比は $18.4/18.8 \div 0.98$ となる。よってこの1次固有モードのモーダルフレキシビリティが静的なコンプライアンスの約98%を占めており、この固有モードに着目して設計変更する必要がある

ことがわかる。そこでこの固有モードのエネルギー分布をみると、アームレストのもつ曲げの復元エネルギーが全体の60%を占めている。また(4-9)式および(4-10)式に相当する単位質量当りのエネルギー分布比を表4-2の右のコラムに記入しているが、この値は非常にばらついており、アームレスト部で特に大きく、この部材に歪が集中していることがわかる。したがってこの部材の剛性を高

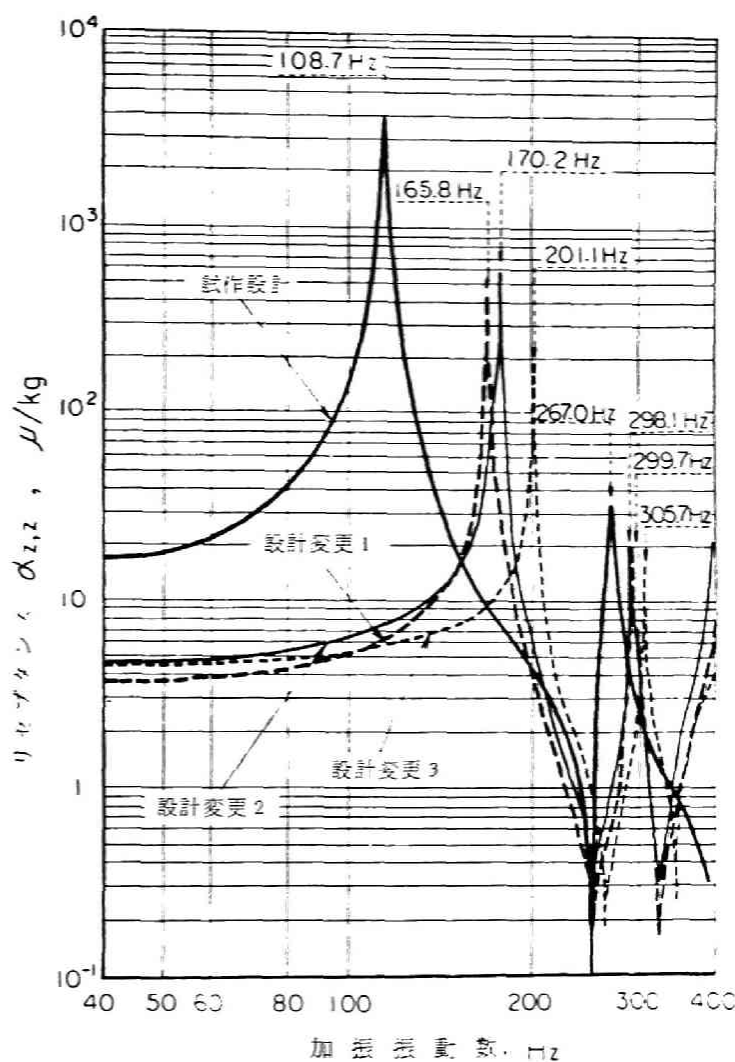


図4-5 ドレッサ点Aの電波数に対するα_{z,z}の計算値

めることが有効である。これを実際に行ったのが設計変更1で、アームレストの設計変更を行い、それと一体になっている部材を約10倍の曲げ剛性をもつ

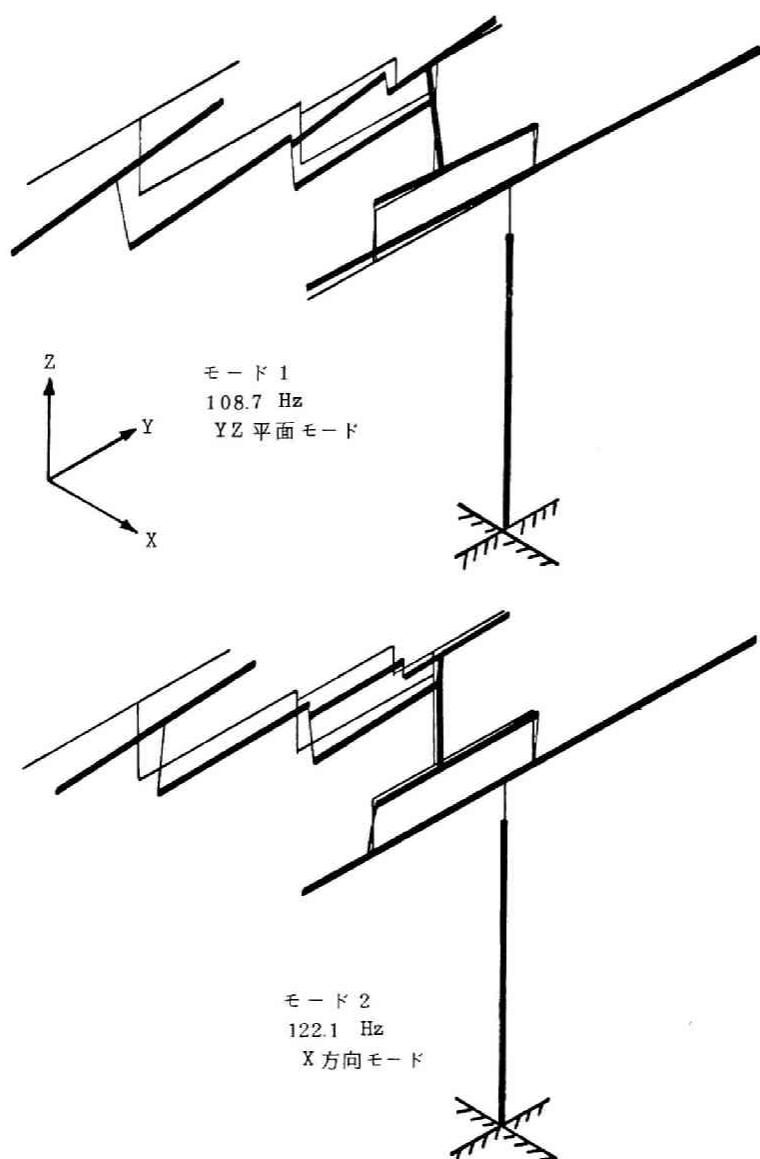
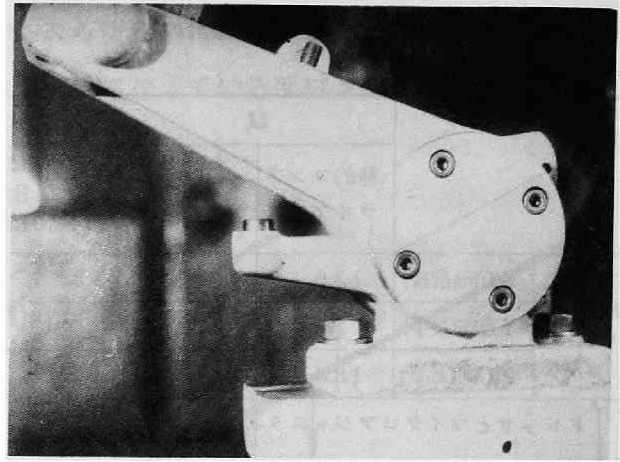


図4-6 2つの低次共振モードにおける振動姿態の計算結果

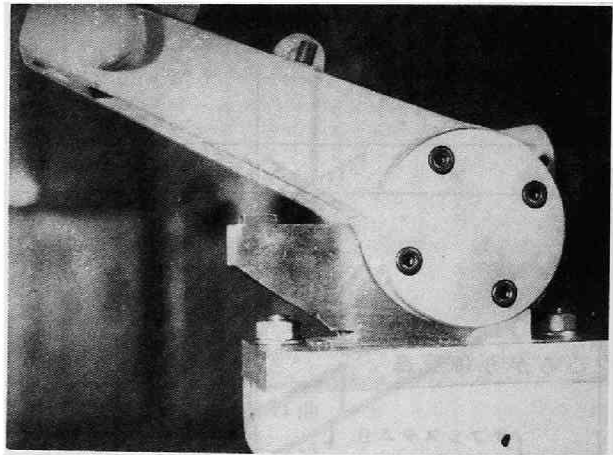
表4-2 ドレッシングユニットの試作設計のモーダルフレキシビリティとエネルギー分布の計算結果

		試 作 設 計					
		静的コンプライアンス	モード1 108.7Hz (実験結果 129.6Hz)	モード2 122.1Hz (113.0Hz)	モード3 267.0Hz (279.3Hz)	モード1 108.7Hz	
静的コンプライアンス及びモーダルフレキシビリティ μ/kg	X方向(前後)	13.9	—	13.1	—	単位質量 当りの エネルギー 分布比	
	Y方向(長手)	2.74	2.73	—	0.000131		
	Z方向(上下)	18.8	18.4	—	0.372		
分慣性 布エ ネ ル ギ 合の	ドレッサとマイクロアジャスタ		0.353	0.326	0.0302	30.8	
	アーム {	サブシステム3	0.472	0.414	0.0465	7.28	
		サブシステム4, 5, 6, 8	0.130	0.188	0.0630	3.45	
		
		
		
計			1.0	1.0	1.0		
復元エ ネ ル ギ の 分 布 割 合	
	
	
	ころがり軸受部		0.00587	0.0200	0.00415	—	
	軸支え {	サブシステム9 {	曲げ	0.0456	0.0796	0.00283	1.65
			捩れ	—	0.169	—	—
		サブシステム10, 11 {	曲げ	0.103	0.0392	0.0471	3.93
			捩れ	—	0.173	—	—
	アームレスト {	曲げ	0.600	0.000190	0.0937	48.0	
		捩れ	—	—	—	—	
	スライドレール {	曲げ	0.178	0.0679	0.721	3.40	
		捩れ	—	0.212	—	—	
	コラムとベース {	曲げ	0.0572	0.111	0.127	0.0212	
		捩れ	—	0.0629	—	—	
計			1.0	1.0	1.0		

ものに作りかえた。
図 4-7(a) に試作設計の、そして図 4-7(b) に設計変更後のアームレスト付近の実機の写真を示している。そこで設計変更後の計算モデルは、図 4-3(b) に示すようにアームレスト部付近のモデル化が異なっている。この設計変更 1 の Z 軸方向の計算結果ではアーム部の慣性エネルギーの分布が最も集中していたので、これを解消するためにアーム部の肉厚を 30% 減少したのが設計変更 2 である。図 4-8



(a) 試 作 設 計

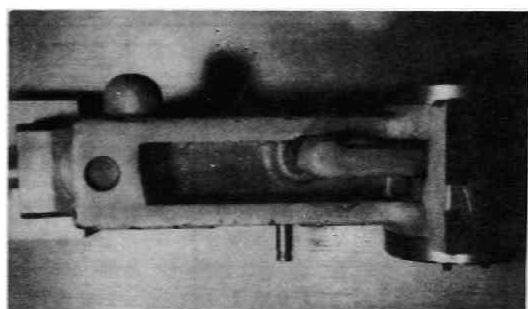


(b) 改 造 設 計

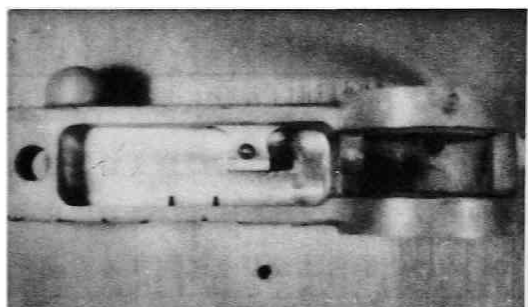
図 4-7 アームレスト部

(a) に試作設計時の、そして図 4-8(b) に設計変更後のアーム部付近の実際のモデルの写真を示す。次に、その設計変更 2 の計算結果ではマイクロアジャスタ部の慣性エネルギーの分布が集中していた。そこで、さらにこれを解消するために、マイクロアジャスタ部の質量を 55% 減じたのが設計変更 3 であり、図 4-9 の上図に試作設計時の、そして図 4-9 の下図に設計変更後のマイクロアジャスタ部付近の写真を示す。

以上の3段階の設計変更による振動特性の変化を実験により測定した。その周波数応答の結果を図4-4に示しており、図4-5の計算結果とそれぞれよく対応がとれていることがわかる。そこで、これらの各場合のZ軸方向の静的なコンプライアンス f_s 、問題となる最低次の固有モードの固有振動数 ω_m 、モーダルフレキシビリティ f_m およびモーダルフレキシビリティ f_m の静的コンプライアンス f_s に対する比 f_m / f_s を表4-3に示している。設計変更1では静的コンプライアンス f_s 、モーダルフレキシビリティ f_m および両者の比ともに大きく改善されていることがわかる。さらに、設計変更2と3では固有振動数 ω_m の上昇と f_m / f_s の減少がみられ、動特性がよくなっている。



(a) 試作設計



(b) 改造設計

図4-8 アーム部

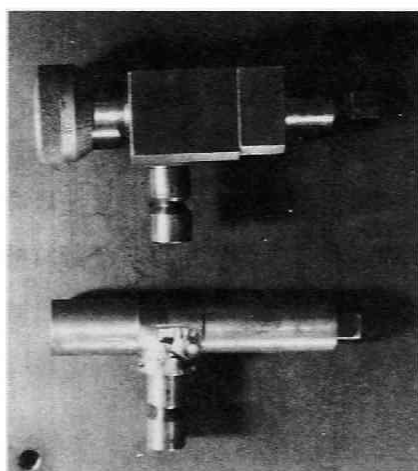


図4-9 マイクロアジャスタ部

(試作設計 — 上区)
(改造設計 — 下区)

表 4-3 ドレッシングユニットの設計変更によるドレッサ点 A での特性値の変化の計算値

設計変更箇所	試作設計	設計変更 1	設計変更 2	設計変更 3
		アームレストの剛性を高める	アームの肉厚を薄くし質量を減じる	マイクロアジャスタの質量を減らす
加振およびピックアップの方向	Z 方向	Z 方向	Z 方向	Z 方向
静コンプライアンス f_s μ/kg	18.8	3.63	4.31	4.37
固有振動数 ω_m Hz	108.7	165.9	170.2	201.1
モーダルフレキシビリティ $f_m, \mu/kg$	18.4	2.44	2.88	2.14
f_m/f_s	0.979	0.705	0.693	0.490

4.2.4 結 言

工作機械の再生型自動びびりに関する最適化設計を行うために、第 I 章で考察したモーダルフレキシビリティおよびエネルギー分布の解析に基づく最適化設計の手法を開発し、それを電子計算機プログラムシステムによって実行する場合の手順と手法を述べた。そしてその手法を実際の機械構造に適用した場合の例を実験による検証と並行して説明し、この手法が有効であることを示した。

この最適化設計の手法は試行的な方法であるが、実際の機械構造は複雑で非常に設計変数としてのパラメータが多く、数学的な最適化の手法をそのまま適用することが困難であるため、この手法は非常に有効であると考えられる。また、種々の解析原理に基づく振動解析用電子計算機プログラムにこの手法を容易に適用でき、さらに工作機械に限らず一般の機械にも用いることができると思われる。

第 3 節 複数の固有モードに着目した場合の振動特性の改善 および最適化設計

4.3.1 緒 言

前節において工作機械の再生型自励びびりに関する最適化設計を行う手法とその適用例を示した。これは問題となる固有モードを各固有モードのモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比の大きさにより判定し、その1つの固有モードのエネルギー分布により設計変更すべき部材を選定して最適化設計を実行する方法である。実際の機械構造物は複雑で最適化のパラメータが非常に多いが、最も影響の大きいパラメータを的確に抽出し操作するこの手法は有効であると思われる。そこで、さらにその最適化設計を有効なものにするに、単に1つの固有モードだけでなく複数個の固有モードに着目し、その固有モード間の特性のバランスを考慮することが必要であると考えられる。本節はその1つの手法として、ある固有モードのモーダルフレキシビリティを引き上げ、その結果最も大きなモーダルフレキシビリティをもつ固有モードのそれを引き下げ、各固有モードのモーダルフレキシビリティの大きさのバランスを取る方法を提唱する。また、試行的手法の不備を補うために、設計変更の最終段階において、数理的な手法としてシンプレックス法を用いて厳密な最適点を求めている。そして、この手法を工作機械を模擬化したモデルに適用し、有効であることを例証する。

4.3.2 最適化設計の原理と手法

(i) 複数の固有モードに着目した最適化設計の概念

複数個の固有モードに着目して、周波数応答の改善を行う最適化の原理について説明する。今、図 4-10 に示すような工作機械の切削点 C において A B 間の相対リセプタンスの周波数特性が大きなリセプタンスを持つ固有モードのモーダルフレキシビリティを、その固有モードのエネルギー分布に着目して下げる直接的な方法は、本章 4.2 節に述べたように有効であるが、さらに特性の改

善を行うに、(1-77)式の関係に応用する。I章3節に考察したように、静コンプライアンスが同じ機械でも、その静コンプライアンスを多くの固有モードのモーダルフレキシビリティに均等に分布するようにすれば、モーダルフレキシビリティの最大のものが下がると同時に、ベクトル軌跡を正実

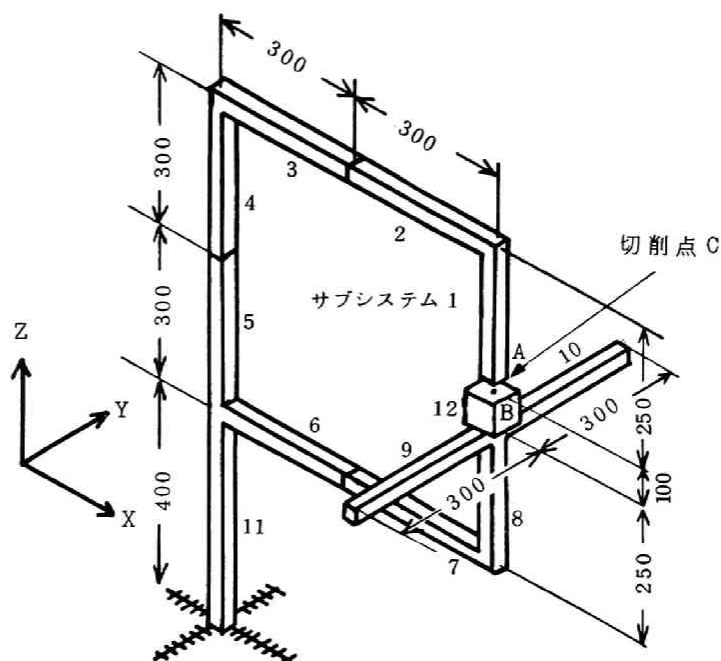


図 4-10 模擬工作機械モデルの説明

部のびびりに対して安定な方向へ移動させることができる。そこで、(1-77)式および(1-78)式に示した静コンプライアンスとモーダルフレキシビリティの関係より、他の固有モードに着目し、そのモーダルフレキシビリティを故意に引き上げることによって、問題となる固有モードのモーダルフレキシビリティを引き下げ、全体としてバランスを取ることができる。さらに対象とする固有モードを多くすることで、各次の固有モードのリセプタンスまたはベクトル軌跡上の最大負実部がそれぞれ小さい理想的な周波数特性が得られる。このような操作によって、工作機械の再生型自励びびりの防止を目的とする最適化設計をさらに押し進めることができる。

(ii) 複数の固有モードに着目した設計変更の単純なモデルによる説明

次に、単純な数学モデルを例にとり、複数の固有モードに着目し各次のモーダルフレキシビリティの分布のバランスの改善を行う概念の例証を行う。

図4-11は、集中質量要素をもつ一端固定一様断面の円管の先端にねじり振動力を加えるモデルである。図中の表に示すように集中質量要素がない場合、1次モードのモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s は0.810と極度に大きい。また、このモデルは集中質量要素の位置と大きさにかかわらず先端での静コンプライアンスは一定である。そこで、(1-77)式の関係を用いて集中質量要素の円管上の位置と大きさを変化させることにより、2次の固有モードのモーダルフレキシビリティを引き上げ、それによって間接的に1次の固有モードのモーダルフレキシビリティの値を引き下げ、モーダルフレキシビリティのバランスを取ることが可能であることを計算結果に基づいて図4-12に示している。ここに、縦軸はモーダルフレキシビ

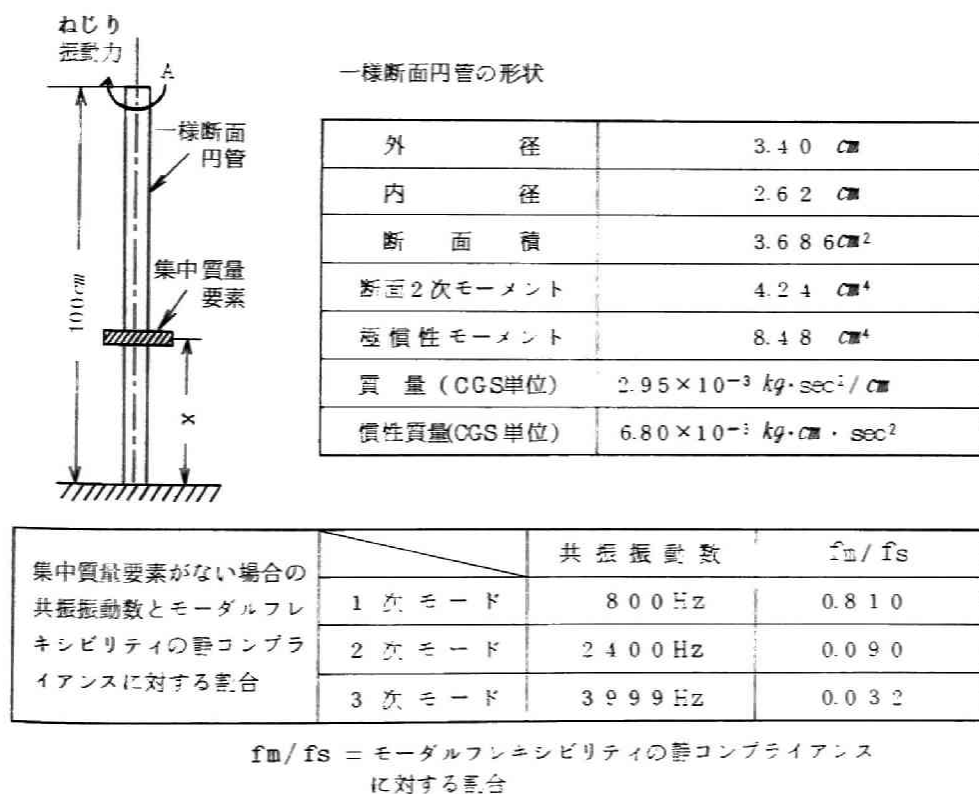


図4-11 集中質量をもつ一様断面円管ねじり振動モデルと動的特性の計算結果

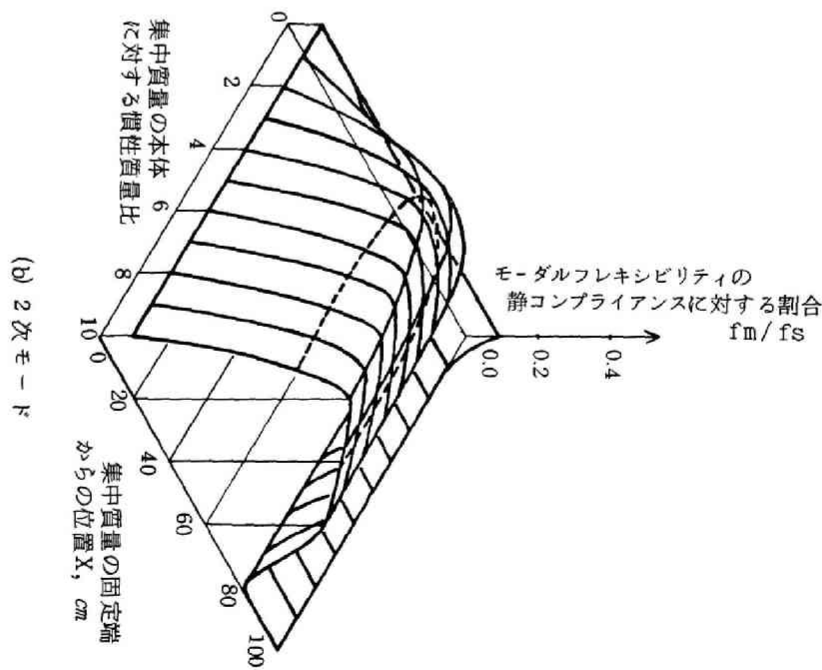
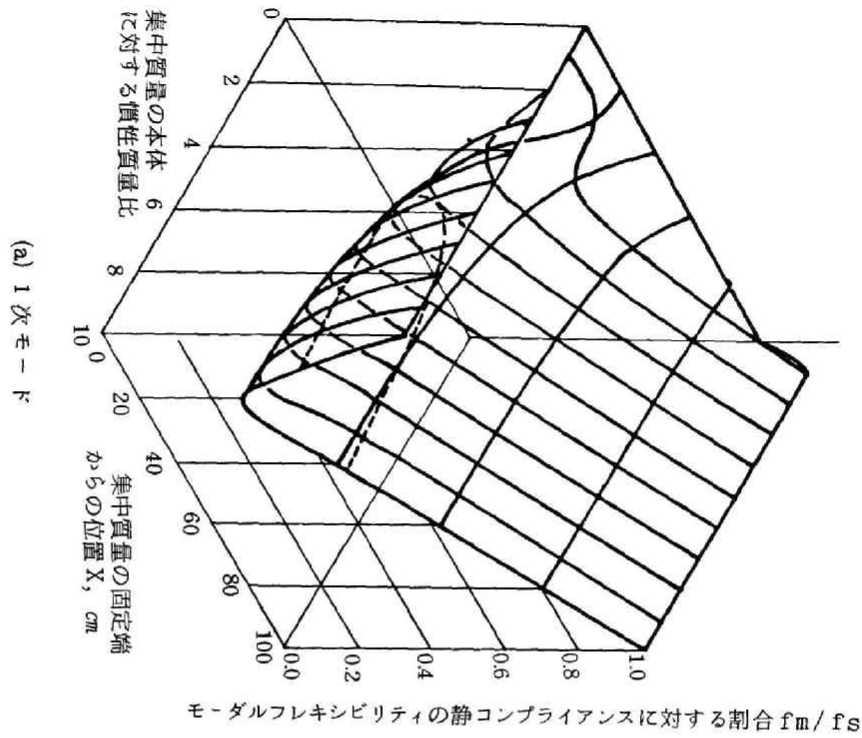


図4-12 集中質量をもつ一様断面円管ねじり振動モデル(図4-11)の1次および2次固有モードのモーダルフレキシビリティの挙動(計算結果)

リティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_c/f_s ，横軸は集中質量の固定端からの位置およびその大きさを表わしている。そして(a)図は1次のモーダルフレキシビリティ、(b)図は2次のモーダルフレキシビリティの挙動を示している。(b)図に見られるように、適当な位置に集中質量を取り付けることによって、2次のモーダルフレキシビリティが上昇し、その影響によって(a)図に見られるように1次のモーダルフレキシビリティが減少している。したがって、問題とする固有モードのモーダルフレキシビリティを引き下げるために、他の固有モードのモーダルフレキシビリティを引き上げることによってその目的を達することができる。また(a)図および(b)図上の点線は1次と2次のモーダルフレキシビリティが一致した所を示しており、この線上において、2つの固有モードを対象としたバランスの取れた設計が得られる。

Ⅲ 最適化設計の手法とその流れ

工作機械の再生型自動びりの防止という観点から、各次の固有モードのモーダルフレキシビリティの値をバランスよく分布させるには、図4-13に示す最適化の流れが考えられる。まず、初期設計において大きなモーダルフレキシビリティをもつ問題となる固有モードに関し、第1ステップとして次の設計変更を行

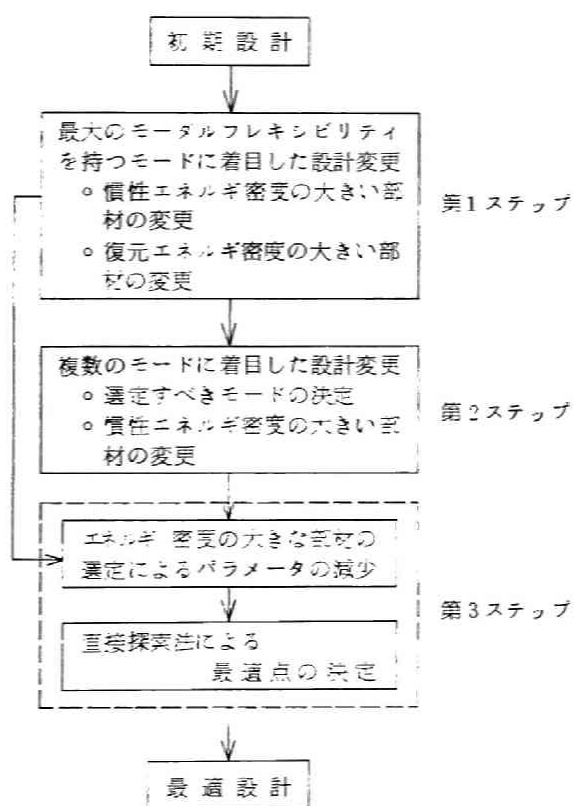


図4-13 最適化の流れ

う。つまり慣性エネルギー分布の大きい部材の重量を減少させ、かつ復元エネルギー分布の大きい部材の剛性を高める。この操作を繰り返し行い、問題となる固有モードのモーダルフレキシビリティを引き下げ、各次の固有モードのモーダルフレキシビリティを多くの固有モードに対してバランスよく分割させる。

しかし、この操作によって目的を達成すればよいが、多くの場合問題となる固有モードにおいて設計変更を行う部材の形状が実用上の制限を越えてしまい、1つの固有モードのみに着目した設計変更には限界が生じる。そこで、第2ステップとして複数の固有モードに着目した設計変更を行う。これは、(1-77)式に示したモーダルフレキシビリティの重要な関係式を利用して、他の固有モードのモーダルフレキシビリティを引き上げることにより、間接的に特に大きなモーダルフレキシビリティを引き下げ、できる限り多くの固有モードにモーダルフレキシビリティを均等に分布させる。これを実行するために選ぶ固有モードとしては、そのエネルギー分布状態が本来問題としている固有モードとは異っていることが必要である。特に、エネルギー分布率およびエネルギー密度の割合が大きい部材が一致していないことが望ましい。そして、その固有モードでの慣性エネルギー分布の大きな部分の重量を増加させる。これによって静剛性を落とすことなく、モーダルフレキシビリティの各次の固有モードに対するバランスを取ることができる。ここで、着目している n 個の固有モードのモーダルフレキシビリティを f_p ($p=1, \dots, n$) と表わし、それ以外の固有モードのモーダルフレキシビリティを f_q ($q=1, \dots$) とすれば、(1-77)式を書き換えて次の(4-11)式が得られる。

$$\sum_{q=1}^{\infty} f_q = f_s - \sum_{p=1}^n f_p \quad (4-11)$$

この左辺の値が $f_s/(n+1)$ を越えた時に、着目していない固有モードにおいて最大のモーダルフレキシビリティが生じる可能性が存在する。したがってこの場合には着目する固有モードの数をさらに増加させなければならない。

以上の操作によって各固有モードのモーダルフレキシビリティの値の分布が

ある程度そろったら、今まで操作した部材の設計パラメータの最適な組み合わせを探す必要が生じる。そこで、第3ステップとして数理的探索法によって最適な部材形状の組み合わせを決定する。図4-14は数理的探索法としてシンプレックス法⁴⁻¹⁰⁾を用い、それを図4-11のモデルに適用した1例である。N個の独立に変化するパラメータをもつN次元問題においてシンプレックス法はパラメータの組み合わせをN+1個規定し、これらの組み合わせに対して、鏡像、拡張、収縮などの操作を行ない、評価関数の小さな方向に移動させる方法である。ここでは独立に変化するパラメータは集中質量の位置と大きさの2つであるから次元数は2で、その評価にかかわる変数は静コンプライアンス f_s に対する1次および2次のモーダルフレキシビリティの比 f_1/f_s および f_2/f_s であり、評価関数は f_1/f_s と f_2/f_s のうちの大きい方であって、それを小さくすることが望ましい。図4-14の縦軸は集中質量の位置、横軸は集中質量の大きさを取ったものである。ここに番号0で示される三角形の3頂点の状況に対する解析結果から番号順に移動していき、20番目の三角形で $f_1 = f_2$ に収束している。

また、多くの最適設計問題で与えられる様な総重量一定の制約を想定する場合は、図4-13に示した最適化の流れの第1ステップにおいて、重量を減少させた分だけ剛性を増加させる部材に重量としてつけ加えることにより、重量一定としての設計変更が実現できる。さらに第2ステップおよび第3ステップでも、その重量の変化の幅を制限することにより、ほぼ重量が一定の設計を作成することができる。また、第3ステップにおいて評価関数に重量の項を入れることにより、重量がほぼ一定の設計とか重量が最小になる様な設計を実現することが可能である。

4.3.3 最適化設計の適用例

(i) 適用モデルの説明

図4-10の工作機械を模擬化したモデルを30°角の鋏材で作ったと想定し、

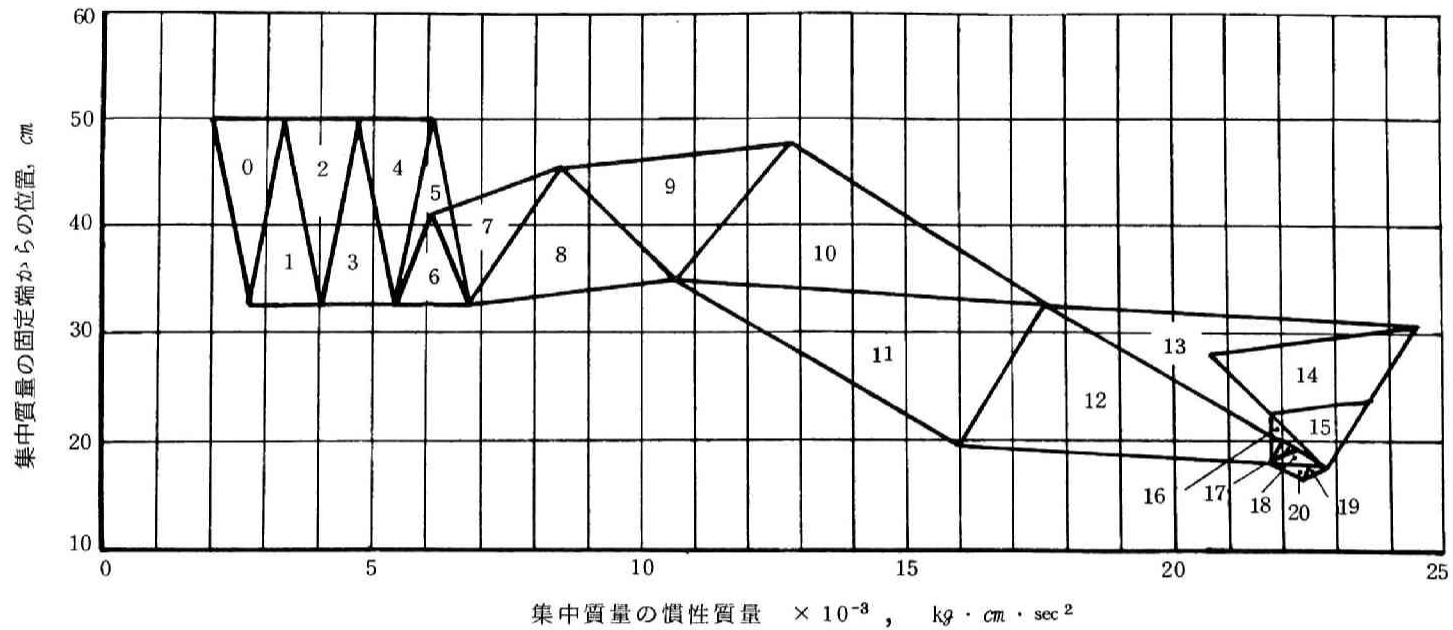


図 4-14 集中質量をもつ一様断面円管ねじり振動モデル(図 4-11)へのシンプレックス法の適用
(三角形内の番号はシンプレックス法の繰り返し回数を示す。)

これを初期設計として切削点CにおけるAB間に作用する相対加振力に対して生じる相対変位の相対リセプタンスを問題とする最適化設計を行う。その初期設計について相対リセプタンスを計算した結果を図4-15に示す。実線はX方向の、破線はZ方向の相対加振力に対する相対変位の相対リセプタンスの計算値を表わしており、いずれも18.30 Hz、32.76 Hzおよび54.24 Hzに2、3および4次の共振点が存在する。また、括弧内の共振振動数は、実際に作成したモデルを

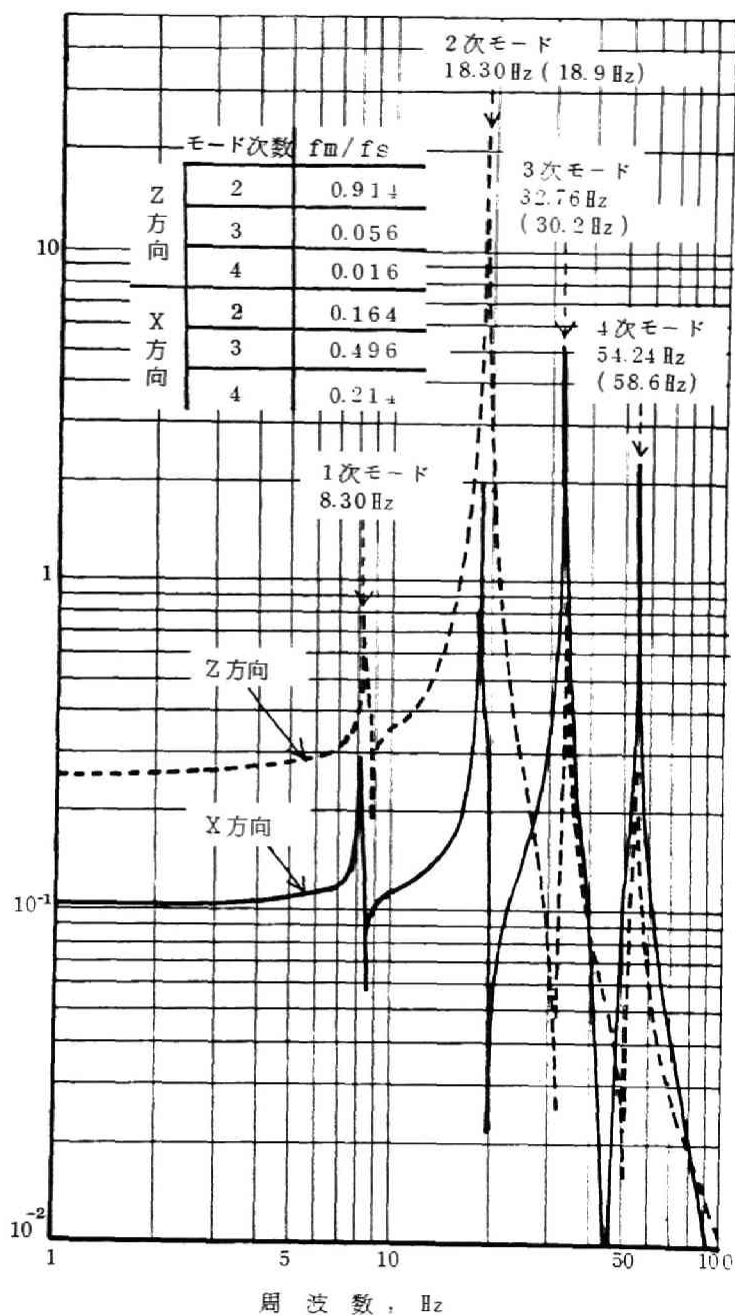


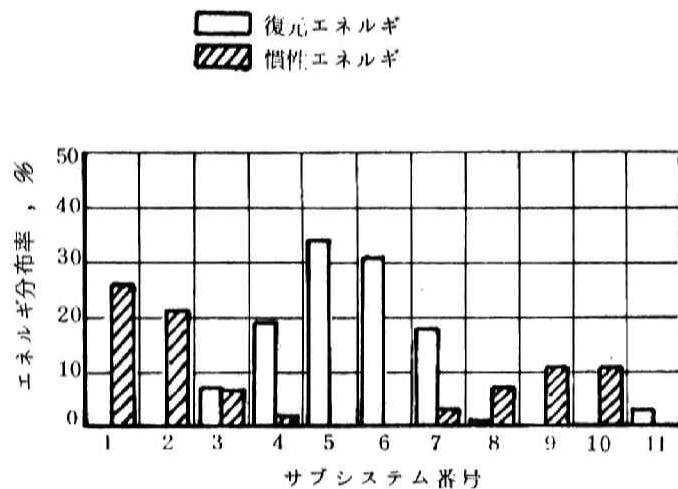
図4-15 模擬工作機械モデルの初期設計における切削点での周波数応答

加振実験して得られた実験値を示している。

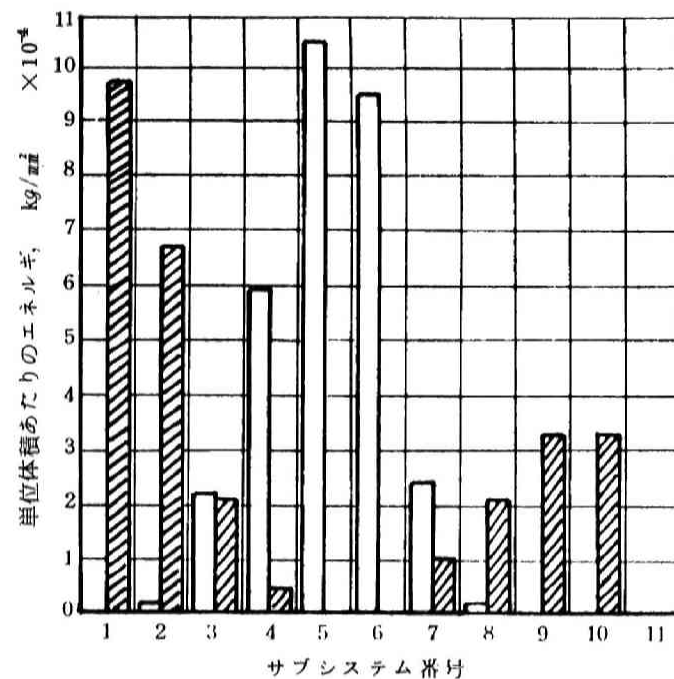
そこで、まず X 方向の応答を見ると、各次のモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する比 f_m/f_s を示す左上の表からもわかるように、比較的バランスが取れているといえる。これに対して Z 方向の応答は、同表の f_m/f_s の値からバランスが非常に悪く設計変更を必要とすることがわかる。また 2 次の固有モードの f_m/f_s は 0.914 と非常に大きい。したがって以下では、切削点 C の Z 方向の相対リセプタンスに対するモーダルフレキシビリティに適用した最適化設計の例を述べる。

(ii) 適用 1

図 4-16 は図 4-10 の初期設計のモデルでの 2 次固有モードのエネルギー分布率と単位体積当りのエネルギー分布を示している。(a) 図の縦軸は全システムの最大復元エネルギーおよび最大慣性エネルギーに対する各サブシステムでの最大復元エネルギーおよび最大慣性エネルギーの比率のパーセント（エネルギー分布率と呼ぶ）を表わし、横軸はサブシステム番号である。そして、(b) 図の縦軸はその固有モードのある変位状態での単位体積 (mm^3) 当りの復元および慣性エネルギー分布を示している。これらの図より、2 次モードにおいてエネルギー分布率および単位体積当りのエネルギー分布ともサブシステム 5 において復元エネルギー分布が最大であり、またサブシステム 1 において最大の慣性エネルギー分布をもつ。そこで、図 4-13 の第 1 ステップの設計変更として、サブシステム 5 の断面の辺長を増大させて剛性を高め、サブシステム 1 の断面の辺長を減少させて重量を減らすことが必要である。図 4-17 はその経過を示したものである。縦軸は各次の固有モードのモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンスに対する割合 f_m/f_s 、横軸にはサブシステムの断面積を取っている。サブシステム 5 については 9 cm^2 から 36 cm^2 まで、サブシステム 1 については 9 cm^2 から 2.25 cm^2 まで断面積を変化させた。その結果、2 次モードのモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合を 0.914 から図中の P 点の 0.703 まで減少させることができた。



(a) 各サブシステムのエネルギー分布



(b) 各サブシステムの単位体積あたりのエネルギー

図 4-16 初期設計における 2 次モードのエネルギー分布と単位体積あたりのエネルギー

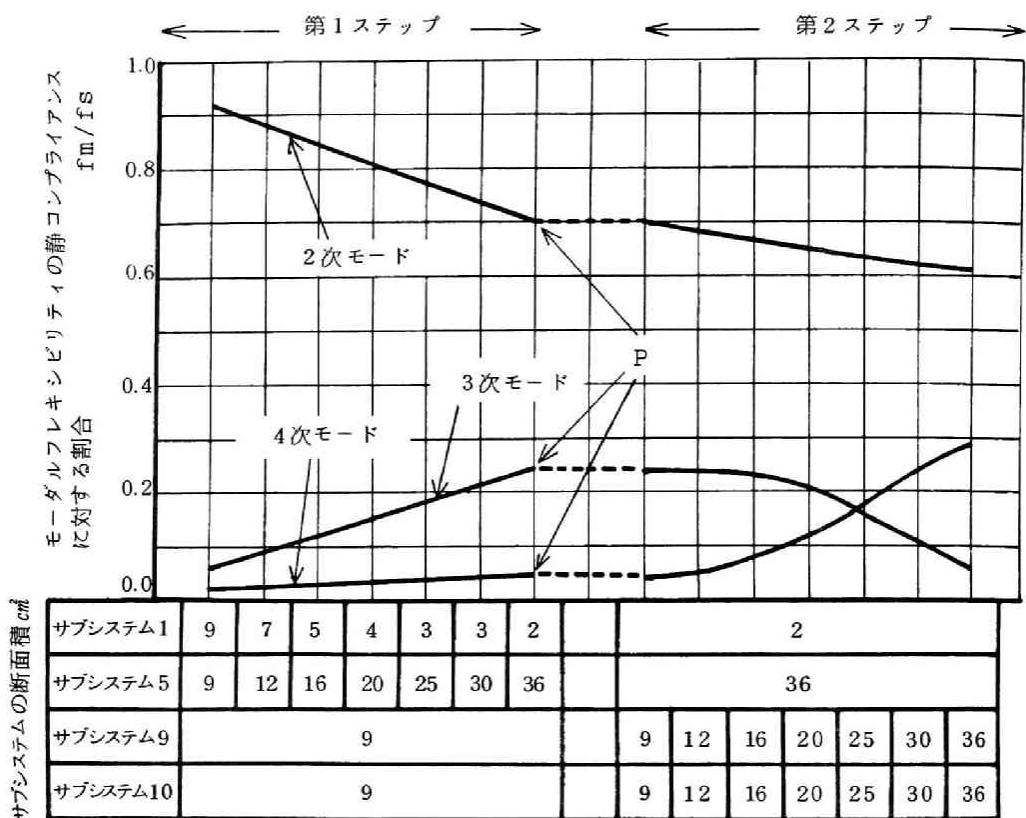
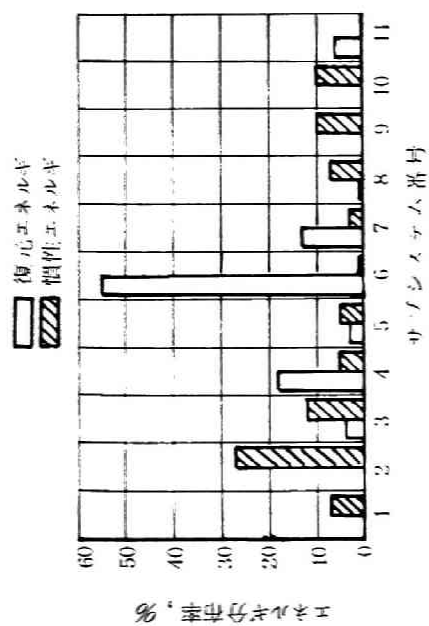


図 4-17 適用 1 における第 1 および第 2 ステップの経過

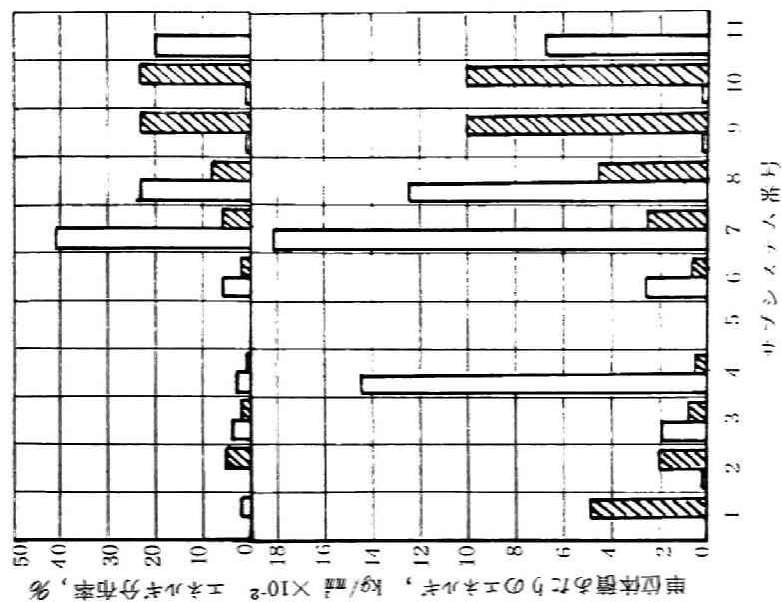
次に第 2 ステップとして複数の固有モードに着目した設計変更を行うのであるが、それにはモーダルフレキシビリティを引き上げる固有モードを選定しなければならない。図 4-17 の P 点で見ると、2 次のモードの次に大きなモーダルフレキシビリティを持つ 3 次のモードを引き上げるのが妥当であるが、第 1 ステップ終了時の P 点での各次固有モードのエネルギー分布率を示す図 4-18 を見ればわかるように、2 次と 3 次のモードの慣性エネルギー分布型はかなり類似している。よって、3 次のモードのモーダルフレキシビリティを引き上げることは、2 次のモードのモーダルフレキシビリティを上昇させる結果となることが予想され、3 次の固有モードは選定すべきモードとはなり得ない。そこで、今度はその次に大きいモーダルフレキシビリティを持つ 4 次のモードに



(a) 2 次モード



(b) 3 次モード



(c) 4 次モード

図4-18 図4-17中の第1ステップ終了時Pの名次固有モードにおけるエネルギー分布率および単体体積あたりのエネルギー

ついて検討する。図4-18の4次のモードのエネルギー分布において慣性エネルギーおよび復元エネルギーの最大の値を持つサブシステムは、2次のモードのエネルギー分布におけるサブシステムとは異っている。したがって4次モードは選定すべき固有モードとして適切であると判定できる。

そこで、4次のモードにおいて慣性エネルギー分布の大きなサブシステム9, 10の重量を増大し、モーダルフレキシビリティを上昇させるために、図4-17に示すようにサブシステム9, 10の断面積を増大させた。その結果として4次のモードのモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合は、0.041から0.282まで増大した。そのため2次のモードのモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合は0.703から0.611まで減少した。

これまでに行ったサブシステムの設計変更は、サブシステムの選び方に物理的な誤りはないが、設計変更の値は必ずしも最適とは言えない。そこで設計変更の第3ステップとしてシンプレックス法を用いてそれらの最適な組合わせを決定する。図4-19はその結果であり、上図の縦軸はモーダルフレキシビリティ f_m の静コンプライアンス f_s に対する割合 f_m/f_s 、横軸はシンプレックス法の繰り返し数である。また、下図の縦軸はサブシステムの断面積、横軸は上図と同じである。ここで評価関数としては、2, 3および4次の固有モードの中でのモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する比の最大値であり、これが最小となることを目標としている。このモデルではサブシステム1, 5, 9および10の断面積の4つのパラメータを操作する($N=4$)ので、各回数ごとに5つの組合せ($N+1=5$)を規定してそれらに対する評価関数を計算する。図中には、その5つの計算点中で最大の評価関数を与えた結果と、最小の評価関数を与えた結果とを表示している。また、下図のサブシステムの断面積は最小の評価関数を与えた5つの組合せ中の最適な場合を示したものである。なお、これらのパラメータには、パラメータの取る値が不自然なものにならない様に、サブシステム1では1から8cm²まで、サブシステム5, 9およ

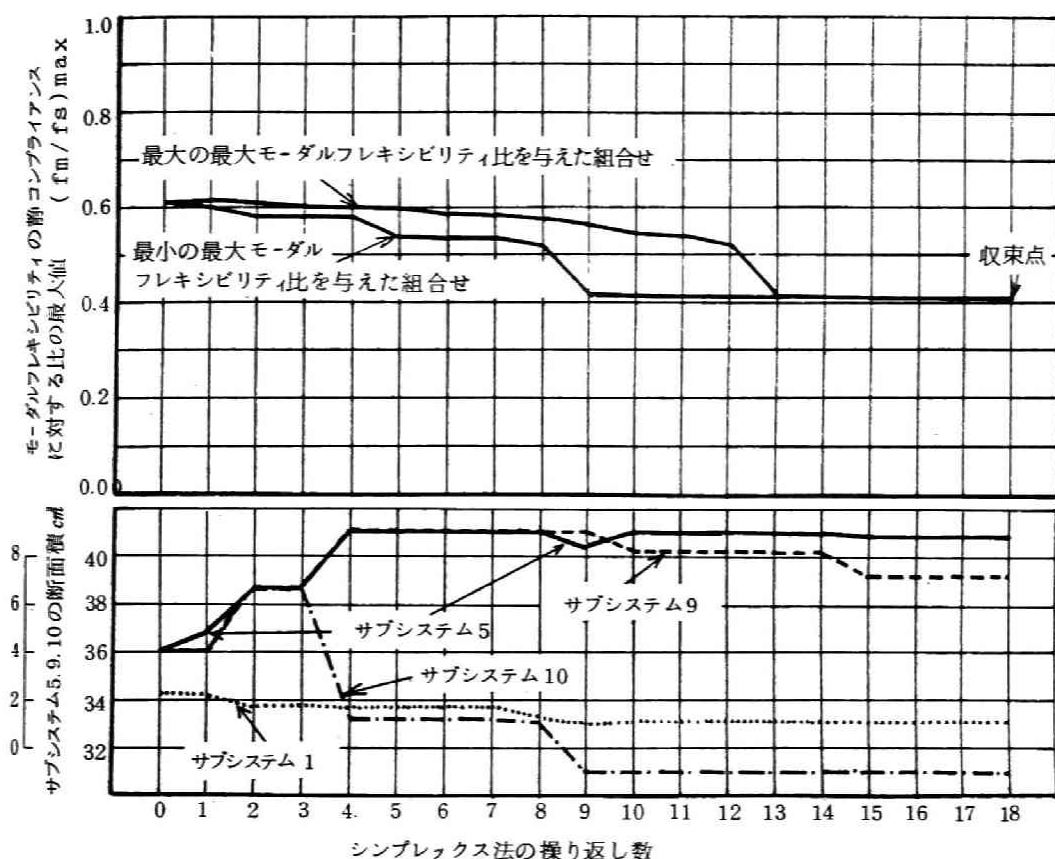


図4-19 適用1における第3ステップ(シンプレックス法の適用)の経過

び10では31から41 cm²の制約条件を付加している。このようにした結果、モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合 f_m / f_s を0.414まで減少させることができた。なお、この状態での全重量は初期設計の全重量の1.71倍であった。

(iii) 適用 2

(ii)で述べた適用1において、2次モードの第1ステップ終了時のエネルギー分布(図4-18(a))を見ればわかるように、サブシステム6の復元エネルギーが非常に大きくなっている。適用1では第1ステップ中設計変更するサブシステムを最初のエネルギー分布のみをみて判定したものであったが、適用2においては第1ステップにおいて、サブシステムの断面積を一定値変化させるたびにエネ

ルギ分布を見て設計変更するサブシステム番号を決定した。すなわち図4-20において最初の段階では、前例と同様にサブシステム1の重量を減少させる目的で断面積を9 cm²から8 cm²に減少させ、サブシステム5の剛性を高めるため断面積を9 cm²から10 cm²に増加させた。そして、この時点(図4-20中のQ点)で再度エネルギー分布を検討した。その結果が図4-21である。単位体積あたりのエネルギーにおいて慣性エネルギーの最大であるサブシステム番号は1であるが、復元エネルギーの最大なものはサブシステム5からサブシステム6になっている。したがって、次には図4-20に示す様にサブシステム1の重量を減少させるため断面積を8 cm²から7 cm²に減少させ、サブシステム6の剛性を高めるため断面積を9 cm²から10 cm²に増大させた。

このように、一定変化ごとにエネルギー分布を見て判定しながら設計変更を行

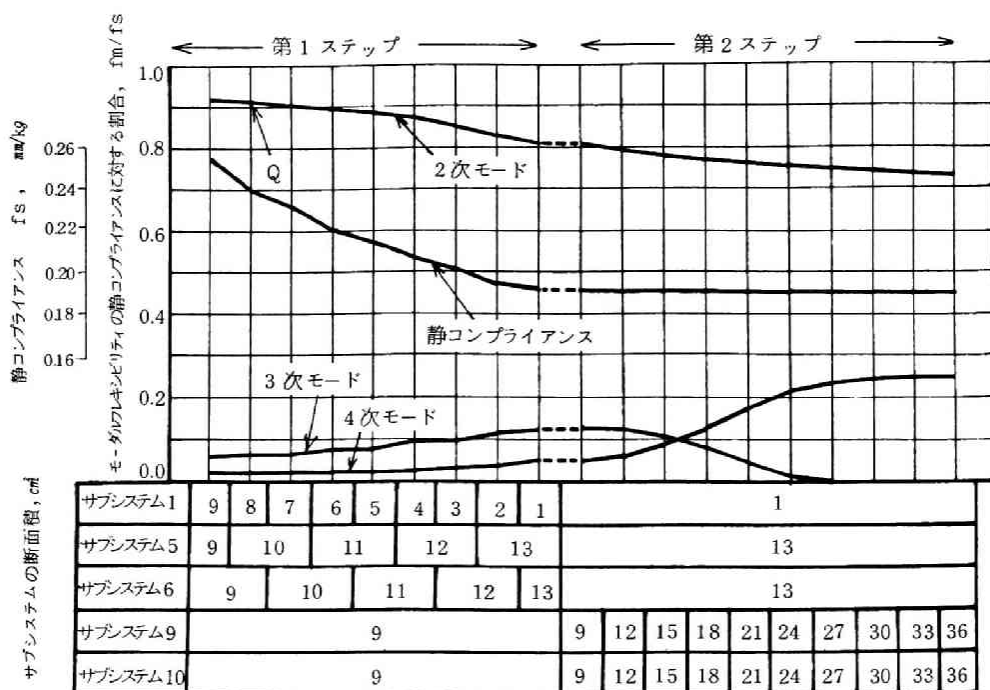


図4-20 適用2における第1ステップおよび第2ステップの経過

い、第1ステップ終了時にサブシステム1は1cm²、サブシステム5は13cm²、サブシステム6は13cm²と断面積が変化した。これによりモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合は0.914から0.808まで減少した。この減少幅は第1ステップ自身としては、適用1より少ないが、サブシステム5および6の断面積を9cm²から13cm²に変化させることによって得られたもので、適用1のように9cm²から36cm²にも及ぶ変化を行ったのと比較すれば、かなり能率的な設計変更であると言える。

次に図4-20における第2ステップとして適用1と同様に4次モードを引き上げるために、サブシステム9および10の重量を増大させた。その結果、モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合は0.808から0.730まで減少した。

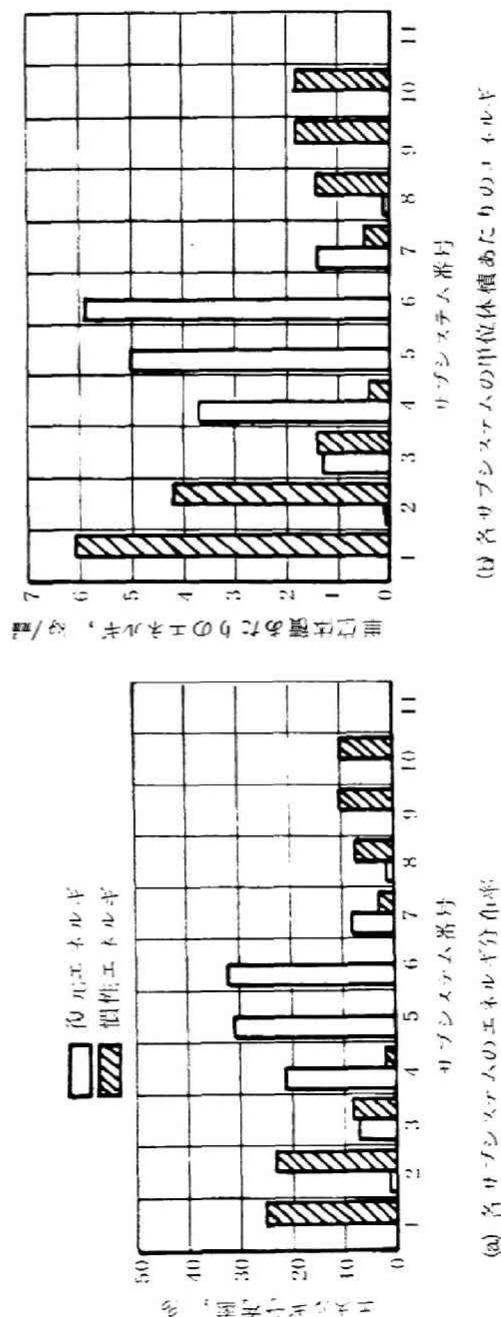


図4-21 適用1の第1ステップの図4-20中のQ点での2次モードのエネルギー分布と単位体積あたりのエネルギー

その後、第3ステップとして行ったシンプレックス法による設計変更を図4-22に示す。ここでは、パラメータとしてサブシステム1, 5, 6, 9および10の断面積を取る。またサブシステム5, 6は8 cm² から18 cm² まで、サブシステム9, 10は31 cm² から41 cm² までの間に収まるように制約条件を課した。この設計変更では図4-22の上図に示してあるように、モーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合 f_m / f_s を0.294まで減少させることができた。図4-22の下図は各サブシステムの断面積の変化を示している。なお、この図においてサブシステム1の断面積の値は描いていないが、第3ステップの最初から最後までほぼ1 cm² を保っていたため図から省略した。

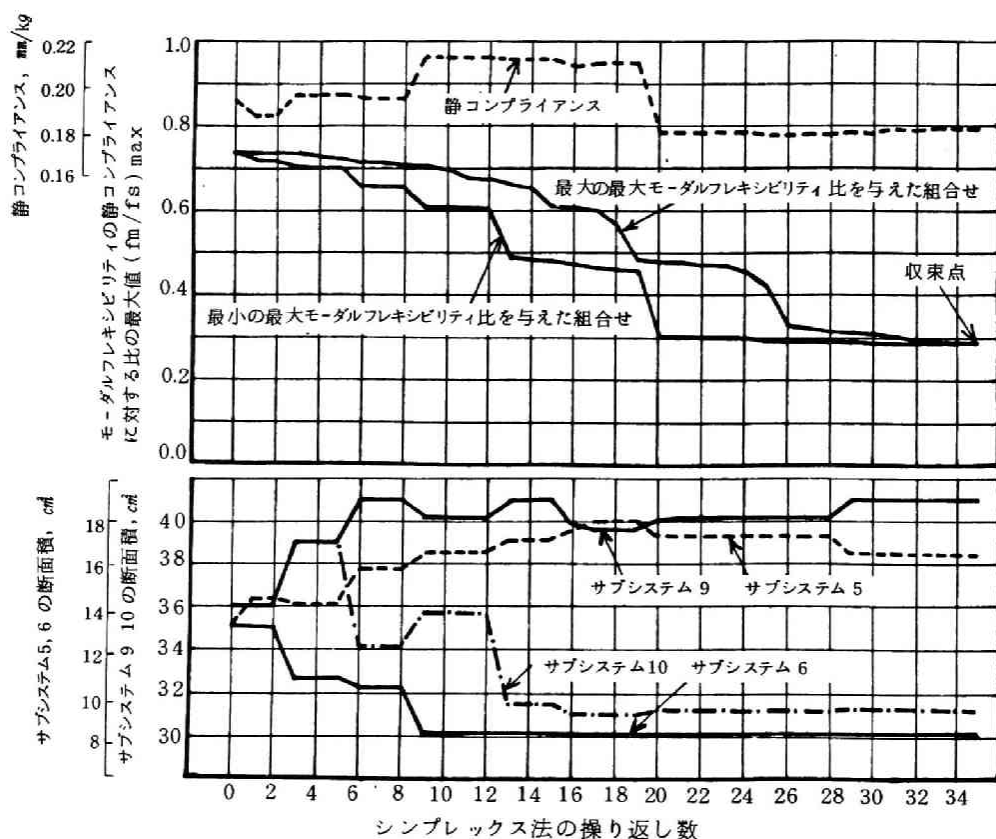


図4-22 適用2の第3ステップ(シンプレックス法の適用)の経過

このように、第1ステップの各段階ごとにエネルギー分布を判定し、設計変更するサブシステムを決定したことにより、適用1よりもさらに改善がなされ、この方法が有効であることがわかる。適用2の最終的な形状を図4-23に示すが、図4-10の初期設計に対する全重量比は1.49倍であり、適用1の全重量比が1.71倍であることを考えても適用2の方がすぐれていることが理解される。

Ⅳ 適用3

適用1および2では、エネルギー分布という物理的特性に着目することによりパラメータとして変化させるべきサブシステムを選定し、図4-13における第1および第2ステップの操作を行ない、その後それらの操作の不備を補うために数理的手法による第3ステップの操作を行った。しかし、パ

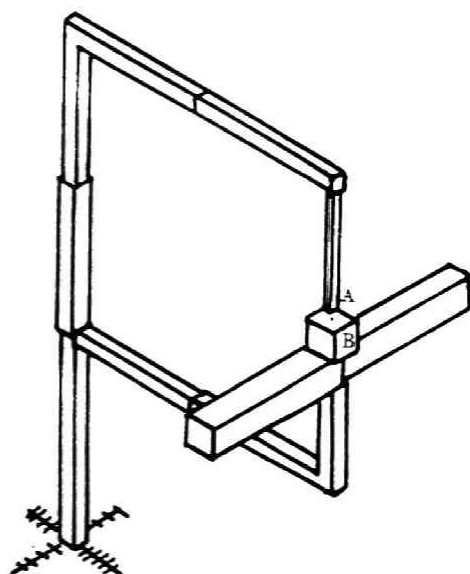


図4-23 適用2における設計変更後の振動工作機械モデル

ラメータの選択さえ正しければ後は数理的手法のみによって最適形状が得られるのではないかという考えも出てくる。そこで適用2においてパラメータとして選択したサブシステム1, 5, 9および10の断面積を、初期設計の9から直接シンプレックス法によって最適設計を行うことを試みた。その結果を図4-24に示す。その下図において見られるように、収束した点でのサブシステムの断面積は、適用2におけるものとは全く異なり、またモーダルフレキシビリティの静コンプライアンスに対する割合 f_m / f_s も0.832と適用2ほどの改善がなされていない。この場合には別の小さな谷の極値に収束してしまったと考えられる。

この適用3におけるように、単に数理的手法に頼るだけでは最適値から大きくかけはなれた収束点に導かれる可能性が高いと考えられる。

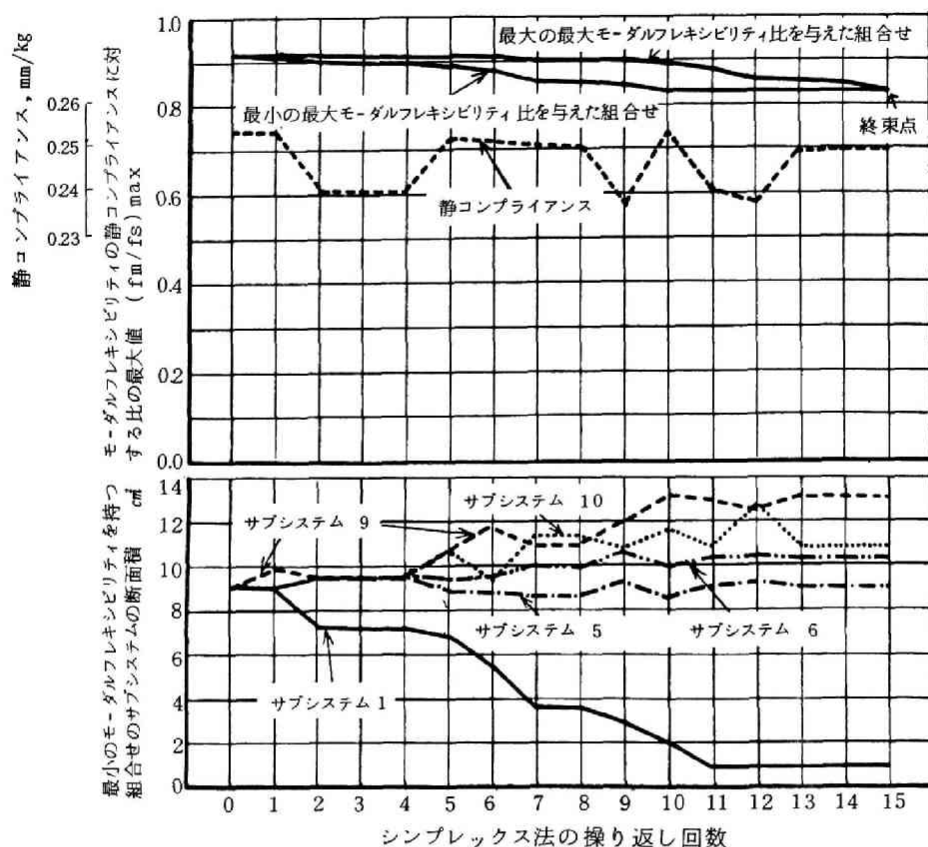


図 4-24 適用 3 のモーダルフレキシビリティの挙動

4.3.4 結 言

工作機械の再生型自励びりの防止を目的とする最適化設計法として、複数の固有モードに着目しそのモーダルフレキシビリティのバランスをとる手法を提唱した。そしてその解析例によりその有効性を例証した。この手法は、本章第 2 節に述べた 1 つの固有モードに着目しそのエネルギーバランスによる最適化を行う方法を、複数の固有モードに着目する方法へ発展させたものであり、さらに有効に最適化を実行できることがわかった。また、このエネルギー分布という物理的な特性に着目した試行的方法の不備を改善するため、設計変更の最

終段階において数理的手法としてシンプレックス法を用いて最適点を決定した。このように、2つの方法を組合せて用いることにより、単に数理的手法に頼るだけでは避けられなかった、最適点から大きくかけはなれた設計点に収束するのを防止することができると考えられる。さらに、エネルギー分布という物理特性に着目することにより、実際に設計変更する部材の数を大幅に減少させることができ、大規模構造物に対しても適用が容易である。また、各設計変更のステップにおいて制約条件の導入が容易に行えると考えられる。

本例では評価関数としてモーダルフレキシビリティを用いたが、第3ステップの数理的手法において重量、共振振動数、静コンプライアンスなどを導入することで、その目的に合った最適設計を得る事ができる。また、本節で述べた計算例は、電子計算機プログラムとして動剛性合成法を用いて解析したが、他の計算原理によるプログラムシステムにも容易に適用できると思われる。そして、工作機械の再生型自励びりの防止という目的に対しその最適化を行っているが、類似の概念は他の機械もしくは振動特性に対しても適用が可能であると思われる。

第 4 節 結 論

工作機械の再生型自励びりの防止を目的とする最適設計を、電子計算機プログラムにより行う手法を開発した。これはⅠ章に解析した最適化の原理に従い、そしてⅡ章で開発した振動特性解析の電子計算機プログラムシステムを用いて、最適化設計を実行する手法である。その最適化の第1段階として、切削点での相対リセプタンスの全振動数範囲における固有モードのモーダルフレキシビリティの最大値を最小にし、さらに第2段階として複数の固有モードに着目してそのモーダルフレキシビリティの大きさの分布のバランスをとるように、これらの固有モードのエネルギー分布を評価して設計変更を行い、そして

次にこのエネルギーバランスによる試行的方法の不備を補うために、設計変更の最終段階において数理的探索法を適用し厳密な最適点を求めている。本章においてこの手法を提唱し、そしてその適用例により有効性を実証した。

この手法によりⅠ章で考察した工作機械の振動特性に関する最適化設計の基本原理を実行に移すことができ、工作機械の振動特性の解析の究極の目的を達せられる。また、次の段階の最適化設計として、Ⅲ章の減退能の解析を適用すれば、さらにこの手法を発展させることができると考えられる。

本論文ではこの手法を工作機械のびびり振動の防止という目的に対して適用しているが、類似の概念は他の種々の機械や振動特性に適用できるものと思われる。

第Ⅴ章 実動状態における振動特性の解析原理

第 1 節 緒 論

機械の振動特性を解析する究極の目的は第Ⅱ章に述べた着目する振動特性に関する最適設計を行うことと、機械が実際に目的とする作業を行い作動状態にあるときの振動挙動を把握することにある。ここでは機械が作動している状態を実動状態と呼び本章において、このときの振動特性を解析するための基礎となる解析原理について述べる。

図 5-1 は実動状態にある工作機械の 1 つの概念を表わしているが、機械内の各要素において種々の振動力が発生し、それが他の部材または要素に伝達される。さらに地盤等を通して機械の外部からも振動力が入ってくる。実際の機械における振動挙動はこれ

らがすべて総合されたものであり、見かけ上非常に複雑である。そこでまず、このような実動状態にある機械の振動特性を解析するに、何に注目しどのような解析が必要であるかを以下に考察する。

実動状態において機械の各要素より発生する力および他の部材や要素に伝達する力は、1 つの振動成分をもつ定常正弦波力ではなく時間的に複雑に変化する種

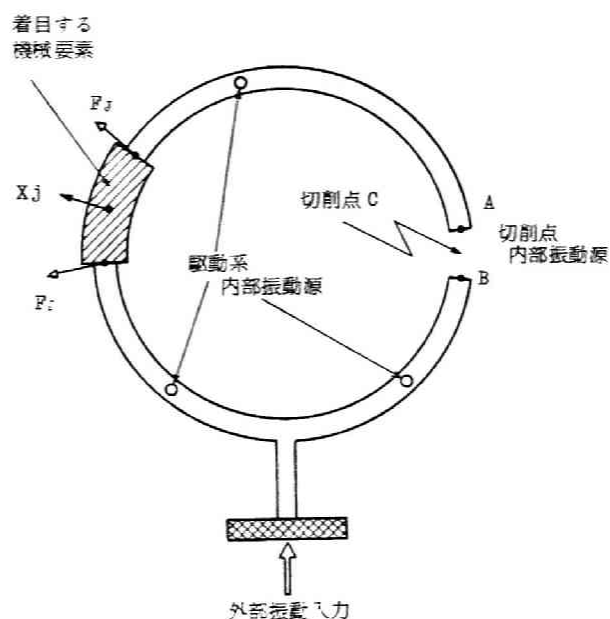


図 5-1 工作機械における振動源の概念図

々の波形をもった振動力である。また、各部材または要素の動きも時間的に複雑に変化する挙動を示す。したがって実動状態の振動特性を把握するには、第Ⅳ章までの周波数領域上での解析とは異なり、時間軸上で変化する挙動としての解析が必要である。

実動状態の挙動を把握する場合、振動システム全体に着目するのか、それともある特定の要素または部材に着目するのかの区別は、第Ⅰ章第2節に述べたように振動特性解析の基本であり重要である。図5-1において、切削点Cでの切削力の変動によるAB間の相対変位に着目する場合には振動系を構成する振動システム全体を把握することが必要であり、また図中のある特定の要素の振動挙動に着目する場合には、その要素と結合する他の部材または要素から伝わる振動内部力 F_J および F_J' を把握すれば他の部材と切り離してその要素の時間軸上の動き X_E 等の振動挙動を求めることができる。いずれの場合であっても、図5-2に示すように機械システムに振動入力加わり、それに対する応答（出力）を解析することが実動状態の解析の基本である。



図5-2 機械システムにおける実動入力と応答の関係

機械システムは、第Ⅳ章までの解析で述べてきたように振動系として周波数領域上に

その固有の特性をもっており、それは機械システムへの入力の位置および形状などによらず機械システムそのものの固有値である。したがって機械システムの振動系としての特性を一般的に表現するには、これまでの解析と同様に周波数領域上で表わすのが妥当である。ゆえに、周波数領域において固有の特性をもつ機械システムに、時間的に変化する入力加わった場合の時間軸上の応答を求めることが必要である。このことを図示したのが図5-2であり、実動状態での解析を行うに、これらの入力、振動系および出力の3つのファクターをどのように把握すべきかについて以下に述べる。

(1) 入 力

機械システムに加わる外力，および機械要素または部材に加わる振動内部力は着目する振動系に加わる入力であり，その発生源を振動源と呼ぶ。実際の工作機械の場合この振動源としてどのようなものがあるかを表5-1に分類して

示している。まず，

表5-1 工作機械における振動源の分類

着目する機械システ

ムの外部から伝達さ

れる外部振動源と機

械システム内で発生

する内部振動源に分

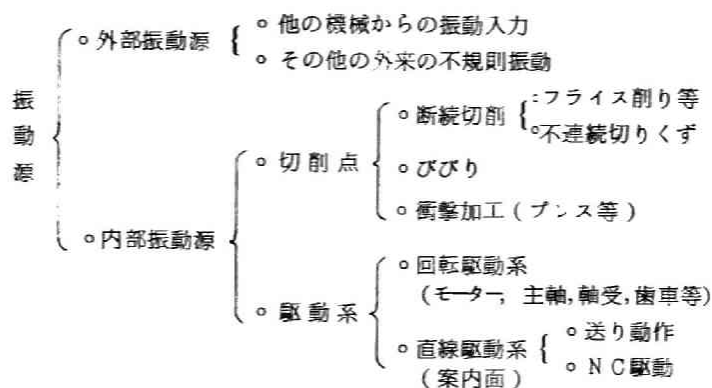
けることができる。

内部振動源としては

加工機械特有の加工

点（切削点）での振

動性と駆動部分より



発生する振動力がある。実動状態の振動特性を解析するには，このような入力を把握することが必要である。さらに，表5-1に挙げた振動源は，機械外部等からの不規則振動とその他の確定的な特性をもった振動力に分類できるが，ほとんどは何らかの確定的なパターンをもった振動源ということができる。従来，実動状態における振動システムの挙動を解析する方法としては，不規則振動として確率論的な解析が多くなされているが，一般の機械における動特性を問題とする場合には，まず確定的なパターンをもった振動力に対する解析を行うことが必要であると考えられる。この確定的なパターンをもつ振動力とは，振動力の時間的な波形の形状と大きさが定まっているものであり，大きく，過渡的な振動力となんらかの周期性をもつ周期的振動力の2つに分けることができる。そこで，本章では入力としてこの過渡的な振動力と周期的な振動力の2つの場合を考える。

(2) 振 動 系

機械システムの振動系としての特性は周波数領域上で明確に表わすことができ、本論文の第Ⅳ章までの解析は、主として振動系の周波数領域上の特性を明らかにし、さらにその最適な特性を得るための設計法を述べたものである。一方、実動状態での振動特性の解析の第一歩は、明確になった振動系に時間的に変化する振動力が加わった場合の応答を求めることにあるが、もし周波数領域上の振動系の特性が不明確であるなら応答を正しく解析することは不可能である。したがって実動状態の振動挙動の解析は、本論文の第Ⅳ章までの解析の上に積み上げられるものである。また、この振動系の特性の表現法は、入力および出力として機械システム内のどの部分に着目し、物理的などのような量を問題にするかによって異なる。

(3) 応 答（出力）

応答は、目的とする特性値であり、着目する挙動や振動系により多種多様なものがあるが、応答を変位、速度および加速度としてとらえる場合と、振動力としてとらえる場合の2つに大きく分けられる。

このように実動状態の振動特性を解析しその挙動を解明する目的の1つはその特性の改善および最適化設計を行うことにある。それは図5-3に示すように実動状態の特性が機械の設計とどのような関係にあるかを明らかにすることであるが、第Ⅳ章までの解析で明らかのように設計と振動系の周波数領域上の特性は1対1に対応しており、その特性の改善は設計の変更によって行なえる。また本章で以上述べたことより、実動状態の振動特性は周波数領域上の特性を媒介として図5-3に示す

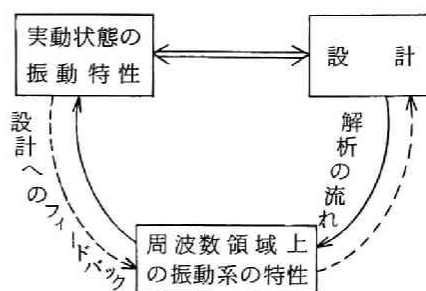


図5-3 実動状態の振動特性の設計との関係

ように設計と結びつけられている。したがって実動状態の振動特性の改善および最適化は、本論文の第Ⅳ章までの周波数領域上の特性を媒体として設計変更により実現することができる。

以上、実動状態の振動特性を解析するに何に着眼すべきかについて考察したが、この解析を実行するにはどのような解析手法が必要であるかを以下に述べる。

- (A) 入力および応答は時間軸上の特性としてとらえる必要があり、一方機械システムの振動系の特性は周波数領域上の特性として求められる。したがって図5-2に示す3つの特性を結びつける解析法が必要である。
- (B) 振動系の周波数領域上の伝達特性として、入力と変位の間の特性ばかりでなく、入力と振動内部力の間の特性の表示法が必要である。
- (C) 一般に実動状態における振動入力の波形は非常に複雑であり、その入力波形を正確にモデル化できる手法が必要である。
- (D) 振動系の周波数領域上の特性を、従来の多くの解析では1自由度系等の自由度数の少ない系として取り扱っているが、実際の機械の挙動では必要十分な多自由度系としての解析が必要であり、多自由度系の応答解析を短い計算時間で容易に行なわねばならない。

本章では、以上の考察にもとづいて、第2節に振動系の周波数領域上の伝達特性を表示する方法、第3節にその振動系に任意形状波形をもった振動入力に加わった場合の応答を求める手法について述べ、実動状態における振動特性を解析するための解析原理を確立する。

第 2 節 周波数伝達特性の表示法

5. 2. 1. 緒 言

時間軸上で表わされる任意波形入力が機械システムに加わったときの応答を求めるには、まず機械システムの振動系としての伝達特性を周波数領域上で表示することが必要である。本節では、問題とする応答として変位と振動内部力の 2 つの場合について、その伝達特性を表示する方法を述べる。特に入力に対する振動内部力としての応答は、従来の解析においては問題にされていないが、本論文において述べてきたように振動解析上非常に重要であると考ええる。

5. 2. 2. 入力と振動変位の間の伝達特性

機械システムにおいてその 1 つの座標 i に角振動数 ω の正弦波外力 $F_i e^{i\omega t}$ が加わったときのシステム内の 1 つの座標 j での変位 X_j の間の伝達特性は、第 1 章第 3 節 (1-85) 式より、次の (5-1) 式と表わせる。

$$\frac{X_j}{F_i} = G(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_m})^2] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (5-1)$$

この $G(\omega)$ を実数部 $R_G(\omega)$ と虚数部 $I_G(\omega)$ に分けて (5-2) 式と (5-3) 式とする。

$$R_G(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f_m [1 - (\frac{\omega}{\omega_m})^2]}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_m})^2]^2 + [2 (\frac{\omega}{\omega_m}) \zeta_m]^2} \quad (5-2)$$

$$I_G(\omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2 f_m \zeta_m (\frac{\omega}{\omega_m})}{[1 - (\frac{\omega}{\omega_m})^2]^2 + [2 (\frac{\omega}{\omega_m}) \zeta_m]^2} \quad (5-3)$$

これにより、機械システムへの角振動数 ω における正弦波入力 F_i に対する応

答 X_j は、各次の共振モードにおける共振振動数 ω_n 、モーダルフレキシビリティ f_n および減衰比 ζ_n によって表わされる。通常、(5-1)、(5-2) および (5-3) 式の右辺の総和は、有限の数 N のモード次数までで十分あり、 ∞ を N と置き換えることができる。

5.2.3. 入力と振動内部力との伝達特性

振動システムにおいてその 1 つの座標 i に角振動数 ω の正弦波外力 $F_i e^{i\omega t}$ が加わったときのシステム全体の変位ベクトル $\{X\}$ は、 N 次までの各次の固有モードの固有変位ベクトル $\{X_n\}$ によって第 I 章 (1-49) 式と同じく次のごとく求まる。

$$\{X\} = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{X_{in} F_i}{2 V_{An}} \{X_n\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_n} \zeta_n} \quad (5-4)$$

この (5-4) 式において両辺を加振力振幅 F_i で割ると次の (5-5) 式となる。

$$\frac{\{X\}}{F_i} = \sum_{n=1}^N \frac{\frac{X_{in}}{2 V_{An}} \{X_n\}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_n} \zeta_n} \quad (5-5)$$

いま、図 5-4 に示す工作機械を模倣化したモデルにおいて切削点での加振力を F_i として、振動内部力を求める要素を図のように想定する。この振動内部力を求める要素の剛性マトリックスを $[K_n]$ とし、その部分の質量および減衰は無視しうるようにその要素の範囲を選択する。そ

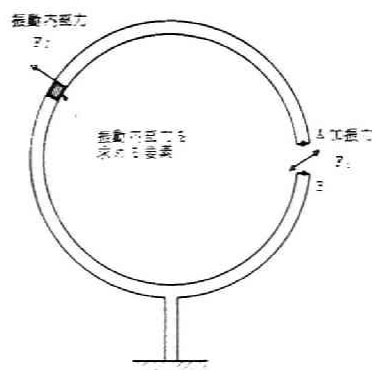


図 5-4 加振力 F_i と振動内部力 F_j との関係の説明図

して、(5-5)式の変位ベクトル $\{X\}$ および $\{X_m\}$ のうち、この要素の部分に相当する変位ベクトルのみを抽出して、 $\{X\}_E$ および $\{X_m\}_E$ とし、(5-5)式を次の(5-6)式とする。

$$\frac{\{X\}_E}{F_1} = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{1m}}{2V_{Am}} \{X_m\}_E}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (5-6)$$

この(5-6)の各項に振動内部力を求める要素の剛性マトリックス $[K_E]$ を左よりかけると

$$\frac{[K_E]\{X\}_E}{F_1} = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{1m}}{2V_{Am}} [K_E]\{X_m\}_E}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (5-7)$$

となる。すると、角振動数 ω および固有角振動数 ω_m の正弦波加振状態での振動内部力 $\{F\}_E$ および $\{F_m\}_E$ は、

$$\{F\}_E = [K_E]\{X\}_E \quad (5-8)$$

$$\{F_m\}_E = [K_E]\{X_m\}_E \quad (5-9)$$

と書き表わされることより、(5-8)式と(5-9)式を(5-7)式に代入して、次の(5-10)式となる。

$$\frac{\{F\}_E}{F_1} = \sum_{m=1}^N \frac{\frac{X_{1m}}{2V_{Am}} \{F_m\}_E}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (5-10)$$

ここで V_{Am} は第1章第2節で述べたように m 次共振モードにおける振動システム全体の復元エネルギーの最大値、 X_{1m} はそのエネルギー状態での加振点の加振力方向の変位を表わしている。この m 次共振モードでの定常正弦波加振において、システム全体の1周期当りの減衰エネルギー D_{Am} は、

$$D_{Am} = 1\pi X_{1m} F_{1m} \quad (5-11)$$

と表わせる。ここで F_{im} は、加振力振幅を示している。また、この m 次共振モードでの減衰比 ζ_m は、

$$\zeta_m = \frac{D_{Am}}{4\pi V_{Am}} \quad (5-12)$$

と書き表わせるゆえ (5-11) 式と (5-12) 式より

$$\frac{X_{im}}{2V_{Am}} = \frac{2\pi\zeta_m}{F_{im}} \quad (5-13)$$

となる。この (5-13) 式を (5-10) 式に代入すると、

$$\frac{\{F\}_E}{F_i} = \sum_{m=1}^N \frac{2\pi\zeta_m \frac{\{F_m\}_E}{F_{im}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2\pi\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (5-14)$$

と表わせる。いま、 $\{F\}_E$ および $\{F_m\}_E$ の振動内部力のうち着目する振動力振幅を F_J および F_{Jm} とすると、(5-14) 式はさらに次の (5-15) 式と表わせる。

$$\frac{F_J}{F_i} = \sum_{m=1}^N \frac{2\pi\zeta_m \frac{F_{Jm}}{F_{im}}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2\pi\frac{\omega}{\omega_m}\zeta_m} \quad (5-15)$$

この (5-15) 式の表わす意味は、ある任意の振動数 ω で作用する正弦波外力 F_i とシステム内の着目する振動内部力 F_J との比 F_i/F_J は、各次の共振モードでの共振振動数 ω_m 、減衰比 ζ_m および正弦波外力 F_{im} とそのときの振動内部力 F_{Jm} との比 F_{Jm}/F_{im} によって表わせるということである。この (5-15) 式の右辺の分子はさらに次の (5-16) 式のように無次元量 C_{iJm} に置き換える。

$$2\zeta_m \frac{F_{Jm}}{F_{im}} = C_{iJm} \quad (5-16)$$

C_{iJm} は振動システムが軽減衰であるならば、その共振モードの減衰比 ζ_m の

大きさにかかわらず，その共振モードにおいて加振および振動内部力を求める点とその座標方向に関して一定の値をとる。これは，共振モードの加振力と振動変位の間の伝達特性を表わすモーダルフレキシビリティを加振力と振動内部力の間の伝達特性を表わす量に類似して考えられるものである。そこで，（５－１５）式に（５－１６）式を代入した次の（５－１７）式により加振力と振動内部力の間の周波数領域上の伝達特性が表示できる。

$$\frac{F_J}{F_i} = \sum_{m=1}^N \frac{i C_{iJm}}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_m}\right)^2\right] + 2i \frac{\omega}{\omega_m} \zeta_m} \quad (5-17)$$

振動系が無限自由度モデルでは N は ∞ に置き換えられる。この（５－１７）式における各次の共振モードにおける C_{iJm} の値は計算機シミュレーションおよび実験による測定から求めることができ，通常数次までのモード次数 N によって（５－１７）式を近似的に表わすことができる。

5.2.4. 結 言

機械システムの振動特性としての伝達特性を周波数領域上で表示する方法を，入力と振動変位および入力と振動内部力の２つの場合について述べた。これにより，周波数領域上で固有の特性をもつ振動系を，図５－２に示した入力と出力の間の関係に変換するための準備ができた。

第 3 節 任意入力に対する応答の解析法

5.3.1 緒 言

本章の緒論で述べたように実動状態の振動特性を解析するには、時間軸上の実動入力に対する応答を求めることが必要不可欠であり、周波数領域上で得られた機械システムの振動特性を時間軸上の入力と出力の間の関係に精度よくしかも短い計算時間で置換える手法を見い出すことが必要である。従来からある任意な形状をもつ入力に対する振動系の応答の求め方としては、微分方程式を直接解く方法、Duhamel の積分を解く方法^{5-1), 5-2)}、ラプラス変換による方法および他の演算子を用いる方法などがあげられるが、前の二者による方法では、振動系が少自由度系の場合および入力形状が既知の関数で表現できる場合には有効であり、現在においても Duhamel の積分をいかにして精度よくかつ能率よく求めるかということに主眼が置かれて研究されているが、その計算の過程での近似の必要性および任意形状入力に適用することの難しき等が含まれており、依然問題点が多くあり、本章で目的とする解析に適用することは困難である。そこで、これらの手法とは異なる新しい解析手法を開発した。この方法は、振動系の特性を前節で述べた周波数伝達特性の表示法を用いて表わし、任意形状をもつ過渡的な入力と周期的な入力の作成は階段関数のフーリエ級数展開を利用している。この解析法は、振動系の自由度の数の増加による応答計算の時間の増加はほとんどなく、確定的な任意形状をもった入力に対する応答を多自由度系に対して精度よくしかも容易に求めることができる。

5.3.2 に過渡的な入力に対する応答の解析原理と解析例を、そして 5.3.3 に任意な形状をもつ周期入力に対する応答の解析原理と解析例を述べる。

5.3.2. 過渡入力に対する応答の解析法

基本的な過渡入力として、インパルス入力、ステップ入力、半正弦波入力、減衰正弦波入力等種々のものを列挙することができるが、ここではこのような

基本的な過渡入力をも含めた任意形状をした過渡的な入力を取り扱えるようにし、これに対する振動系の応答を求める手法を述べる。

(i) 解析の原理

図 5-5 上段の時間軸 t 上に示された基本周期 T_f をもつ単位方形波入力を $y(t)$ としそれに対応した振動系の出力を $x(t)$ とする。これらの波形は階段関数

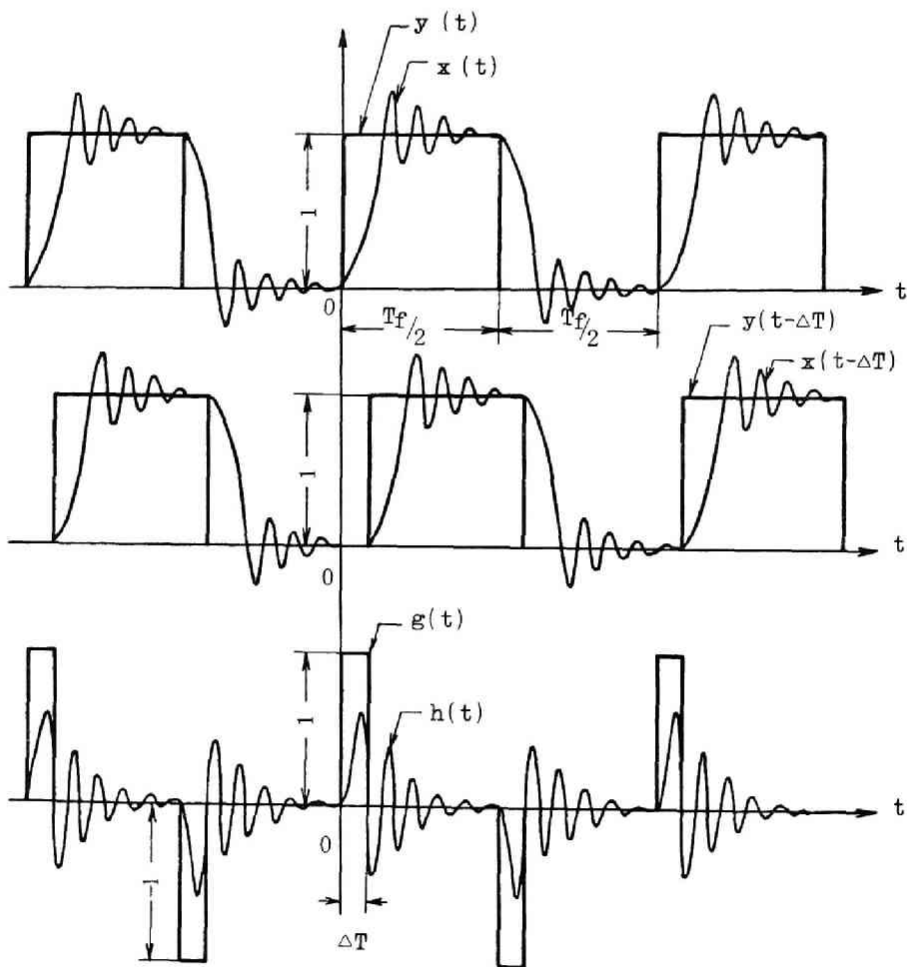


図 5-5 方形波入力とそれに対する振動系の応答の関係の説明図

のフーリエ級数展開を利用した Johnson の方法⁵⁻³⁾を適用すると次の(5-18)式と(5-19)式のように表わすことができる。

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \sin M \omega_f t \quad (5-18)$$

$M = 1, 3, 5, \dots$

$$x(t) = \frac{X_M}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{X_M}{M} \sin(M \omega_f t + \varphi_M) \quad (5-19)$$

$M = 1, 3, 5, \dots$

ここで ω_f は方形波入力の基本角振動数を表す。

また図の中段に示すように入力、出力とも ΔT だけ時間が遅れたものを差し引くことによって正負のパルスが繰返される入力 $g(t)$ に対する応答 $h(t)$ を求めることができる(同図下段参照)。この入力 $g(t)$ と出力 $h(t)$ は次の(5-20)式および(5-21)式として求まる。

$$\begin{aligned} g(t) &= y(t) - y(t - \Delta T) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \{ \sin M \omega_f t - \sin M \omega_f (t - \Delta T) \} \quad (5-20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= x(t) - x(t - \Delta T) \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{X_M}{M} \{ \sin(M \omega_f t + \varphi_M) - \sin(M \omega_f (t - \Delta T) + \varphi_M) \} \quad (5-21) \end{aligned}$$

ここで

$$X_M : \frac{M \omega_f}{2\pi} \text{ Hz における系の周波数応答ゲイン}$$

$$\varphi_M : \frac{M \omega_f}{2\pi} \text{ Hz における系の周波数応答の位相差}$$

を表わしており、図 5-5 下段を見てわかるように応答 $h(t)$ は周期 T_f で繰返されるインパルス応答波形になっている。したがって1つのインパルスが振動系に入った場合、次のインパルスが入るまでに応答が十分に減衰していなけれ

ばそれぞれの過渡応答が重なり、1つの過渡入力に対する応答を正しく求めることができない。そこで決定しなければならないのは、1つのインパルスが振動系に入った場合に十分に応答が減衰するのに要する時間 T_r である。

この時間 T_r を次に解析する。図 5-6 は m 次共振モードにおいて系の応答が粘性自由減衰をしている場合の波形を示している。まず、図に示すように時間 $t=0$ で応答は 0 であるとき、 i 番目のピーク値 $|x_i|$ が 1 番目のピーク値 $|x_1|$ の $P\%$ になる時の i を求める。粘性減衰の場合、次の (5-22) 式の関係が成り立つ。

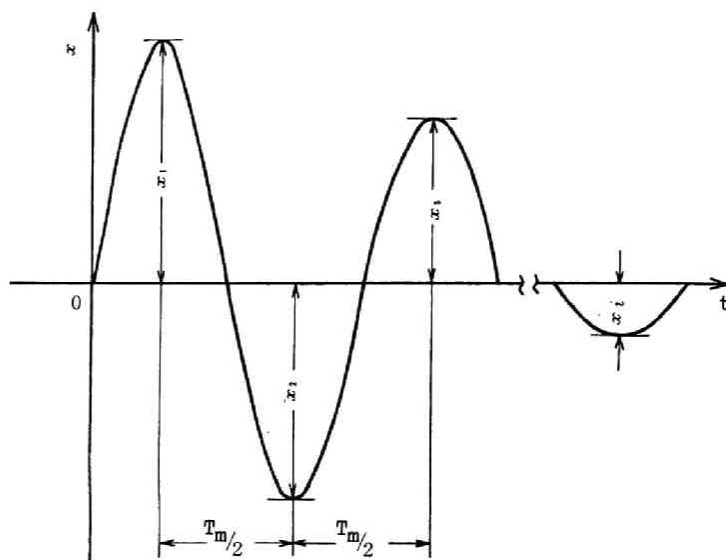


図 5-6 系の応答の自由減衰波形の説明図

$$\left| \frac{x_1}{x_2} \right| = \left| \frac{x_2}{x_3} \right| = \dots = \left| \frac{x_{i-1}}{x_i} \right| = \exp \left(\frac{\pi \zeta_m}{\sqrt{1-\zeta_m^2}} \right) \quad (5-22)$$

さらにこれより

$$\left| \frac{x_1}{x_i} \right| = \left| \frac{x_1}{x_2} \right| \times \left| \frac{x_2}{x_3} \right| \times \dots \times \left| \frac{x_{i-1}}{x_i} \right| = \exp \left[(i-1) \frac{\pi \zeta_m}{\sqrt{1-\zeta_m^2}} \right] \quad (5-23)$$

と表わされる。ここで ζ_m は m 次共振モードにおける等価減衰比である。そこで $\left| \frac{x_1}{x_i} \right|$ の値が $P\%$ になるときの i において、(5-23) 式より、

$$\frac{100}{P} = \exp \left[(i-1) \frac{\pi \zeta_m}{\sqrt{1-\zeta_m^2}} \right] \quad (5-24)$$

の関係がなりたつ。そして、両辺の自然対数を取り、 i を求めると、

$$i = 1 - \frac{\sqrt{1 - \zeta_m^2}}{\pi \zeta_m} \ln \frac{P}{100} \quad (5-25)$$

となる。この P の値は個々の方形波に対する系の応答が相互に重なり合う度合を示している。

次に応答が P ٪に減衰するのに要する時間 T は、

$$T = \frac{i T_m}{2} = i \pi \sqrt{\frac{m_m}{k_m (1 - \zeta_m^2)}} \quad (5-26)$$

と定まる。ここで

T_m : m 次固有モードの減衰固有周期

m_m : m 次固有モードの等価質量

k_m : m 次固有モードの等価剛性

を表す。振動系の各次の固有モードについてこの T の値を求め、そのうち最大のものを方形波の半周期 $T_s/2$ と決定する。したがって P の値を指定することによって、個々の方形波に対する系の応答が相互に重なり合う度合を、どの程度におさえるかを定めることができる。つまり、この P の値は方形波相互の接近度が応答の計算精度に影響を及ぼす度合を決めるもので、これを重なり率と呼ぶ。

次に、振動系の周波数伝達特性は本章第2節で述べた表示法を用いる。たとえば入力と振動変位の間の伝達特性を問題とする場合、伝達関数としてのゲイン X_M と位相差 φ_M は (5-2) および (5-3) 式の ω に $M\omega_f$ を代入し、さらに次の (5-27) 式および (5-28) 式として求まる。

$$X_M = \sqrt{R_G^2 (M\omega_f) + I_s^2 (M\omega_f)} \quad (5-27)$$

$$\varphi_M = \tan^{-1} \frac{I_s (M\omega_f)}{R_G (M\omega_f)} \quad (5-28)$$

この振動系の伝達関数と先に説明した単一パルス入力の作成を用いて、最終的

に求めたい任意形状入力に対する応答の求め方を次に示す。

図 5-7(a)に示すような任意入力をパルス入力の連なりと考える。そして、 n 番目のパルス区間を拡大して示した図 5-7(b)のように、1つのパルスは時間幅 ΔT_n 、その力の大きき \bar{g}_n の方形波パルス入力とし、実際の入力波形とはその時間幅での力積が等しくなるように力の大きき \bar{x}_n を決定する。

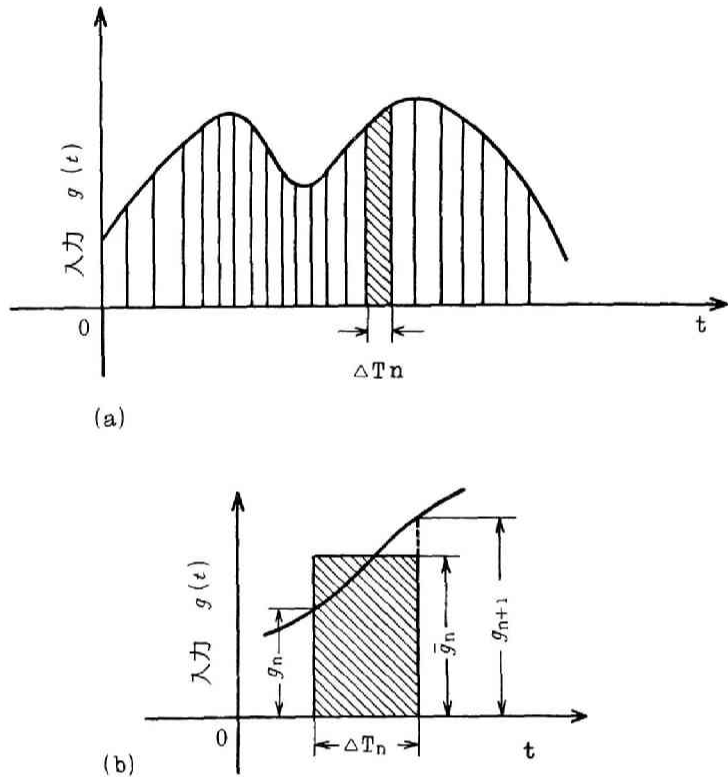


図 5-7 パルス入力による任意形状入力の表わし方の説明図

簡単には、

$$\bar{g}_n = \frac{g_n + g_{n+1}}{2} \quad (5-29)$$

として定める。そこで n 番目のパルス入力に対する変位応答 $h_n(t)$ 、速度応答 $\dot{h}_n(t)$ 、および加速度応答 $\ddot{h}_n(t)$ は、(5-21) 式より次の (5-30) 式、(5-31) 式および (5-32) 式として求まる。

$$h_n(t) = \bar{g}_n \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{X_M}{M} \left\{ \sin[M\omega_f(t - (n-1)\Delta T_n) + \varphi_M] - \sin[M\omega_f(t - n\Delta T_n) + \varphi_M] \right\} \quad (5-30)$$

$$\dot{h}_n(t) = \bar{g}_n \frac{2\omega_f}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} X_m \{ \cos[M\omega_f(t - (n-1)\Delta T_n) + \varphi_m] - \cos[M\omega_f(t - n\Delta T_n) + \varphi_m] \} \quad (5-31)$$

$$\ddot{h}_n(t) = -\bar{g}_n \frac{2\omega_f^2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} M X_m \{ \sin[M\omega_f(t - (n-1)\Delta T_n) + \varphi_m] - \sin[M\omega_f(t - n\Delta T_n) + \varphi_m] \} \quad (5-32)$$

ここで、 n 番目のパルス入力に対する応答は、その入力に加わる以前の時間においては 0 であり、また一連の周期的なパルス入力に加わった後の時間においては同様に 0 でなければならない。この境界条件は次の (5-33) 式のように表わせる。すなわち

$$t < \sum_{i=1}^{n-1} \Delta T_i \quad \text{あるいは} \quad t > \sum_{i=1}^{n-1} \Delta T_i + T_f/2$$

のとき

$$h_n(t) = \dot{h}_n(t) = \ddot{h}_n(t) = 0 \quad (5-33)$$

以上の解析より、任意形状をした m 個のパルス入力より組み立てられる過渡入力に対する変位応答 $h(t)$ 、速度応答 $\dot{h}(t)$ および加速度応答 $\ddot{h}(t)$ は次の (5-34) 式として求まる。

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \sum_{n=1}^m h_n(t) \\ \dot{h}(t) &= \sum_{n=1}^m \dot{h}_n(t) \\ \ddot{h}(t) &= \sum_{n=1}^m \ddot{h}_n(t) \end{aligned} \right\} \quad (5-34)$$

ここで $0 \leq t \leq \sum_{i=1}^{m-1} \Delta T_i + T_f/2$

(ii) 解析例

この過渡入力に対する応答の解析法を用いて計算を行ったもののうち単純な

ものより順にその例を示す。

- (1) 2 自由度計算モデル (2 つの共振振動数の接近の度合いによる応答の変化)

図 5-8 は、図中の表に示す特性をもつ 2 自由度系振動システムを想定し、それに力の大きさ 1 kg 、時間幅 0.005 sec のインパルス入力に加わった場合の変位応答を、2 自由度系の 2 つの共振振動数の接近の度合いをパラメーターとして (a) から (e) まで順番に示している。1 次の共振振動数は 20 Hz と一定で、2 次の共振振動数を (a) より順に 40 Hz 、 30 Hz 、 25 Hz 、 22.5 Hz および 21.25 Hz と 1 次の共振振動数に近づけた場合の変位応答を表わしており、入力の形状、振動系のモーダルフレキシビリティと減衰比が同じでも、共振振動数の値の変化により時間軸上の応答が大きく変化することがよく理解できる。

- (2) 過渡入力に対する変位応答の測定結果と計算機シミュレーション結果との対応

過渡入力に対する変位応答の測定結果と計算機シミュレーション結果との対応を調べるために実験に用いたモデルを図 5-9 に示す。これは第 1 章第 2 節において結合部に加わ

る振動内部力の大きさと減衰比の間の関係を述べるに用いた図 1-10 のボルト結合部により固定された片持ちはりの実験モデルと同一である。ここでは、

はり上の A 点に力検出用のロードセルをはり

つけてハンマーによって打撃することによって加えられる過渡入力を測定し、

B 点の下にセットされる容量型変位計により B 点の応答変位を求めた。図 5-10

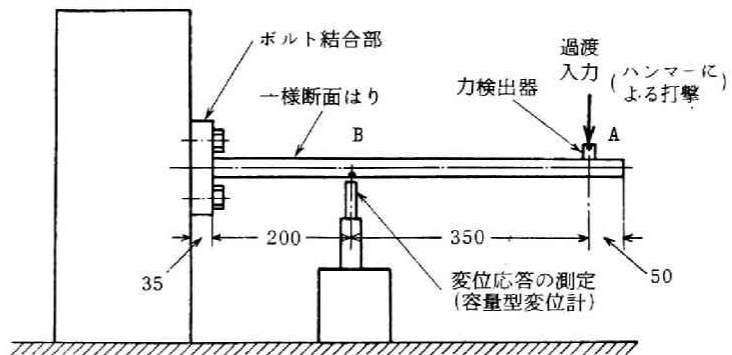


図 5-9 過渡入力に対する変位応答の測定のための片持ちはり実験モデル

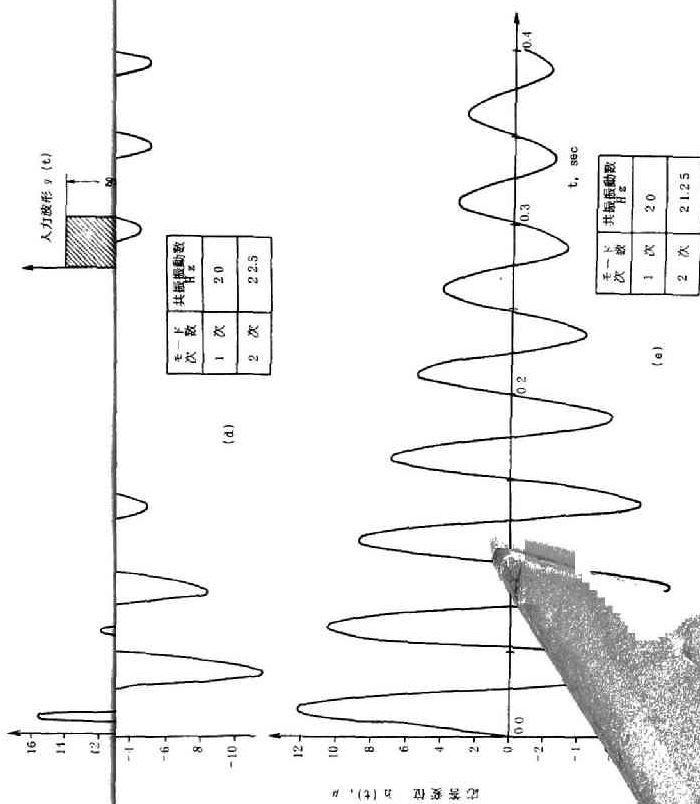


図 2 入力に対する 2 自由度振動系の変位応答

換した
値が約
ある。
型加振
，モー
変位の
す入力
を加振
入力に
の減衰
るモー
ては結
達特性
，実験
には，
は，こ
したよ
力では

もの。

(1)

図：

れにう

変位

て(a)は

の共振

Hz と

状，並

の変イ

(2)

過渡

応を計

におい

る振動

と減衰

述べる

10 の

より図

はりの

一では

はり」

用のロ

つけて

B 点の

の実線は、実験によって得られた過渡入力および変位応答波形をA/D変換した結果を示しており、図5-10(a)は、この図の上に示す過渡入力にピーク値が約6kgの場合、(b)は過渡入力にピーク値が約13.5kgの場合の変位応答である。

図5-10の破線は、図5-9の実験モデルのはり上のA点に小型動電型加振器をセットし、正弦波加振実験より3次の共振モードまでの共振振動数、モーダルフレキシビリティおよび減衰比の値を求め、A点とB点の間の力と変位の周波数伝達関数を定め、そして実験により得られている図5-10に示す入力波形を本節で述べた手法によりインパルス入力の組合せで表わし、それを加振実験より得られた周波数伝達関数への入力としてその応答を本節の過渡入力に対する解析法を用いて求めた計算結果を示している。1次の共振モードの減衰比は、第1章図1-11に示したようにボルト結合部接触結合面に加わるモーメントの大きさにより遷移的に変化するが、図5-10の(a)と(b)においては結合面に加わる力が小さい領域での減衰比の値を用いて振動系の周波数伝達特性をシミュレーションしている。過渡入力大きさが小さい(a)の場合には、実験値と計算値は応答波形の形と大きさともよく一致しているが、(b)の場合には、応答波形の形は相似であるが、波形の大きさがかなりずれている。これは、このボルト結合部をもつ振動系が加振入力大きさにより図1-11に示したような減衰能の非線形性の特性をもち、(b)の実験が行われた大きな加振入力では計算に用いた値より大きな減衰能が働いていたからであると理解できる。

(3) 3自由度計算モデル（入力点および応答ピックアップ点の相違による変位応答の変化）

解析例(2)で解析したと同じ形状のモデルにおいて、片持ちはりの支持条件を剛結合とし、そして減衰比を一律に0.004とした場合の周波数応答を第1章で述べた動剛性合成法により求めた。A点を加振した場合のA点の変位…①、A点を加振した場合のB点の変位…②、およびB点を加振した場合のB点の変位…③、の3つの場合の3次の共振モードまでのモーダルフレキシビリティの値を計算し表5-2に示している。この計算結果を用いてそれぞれの振動

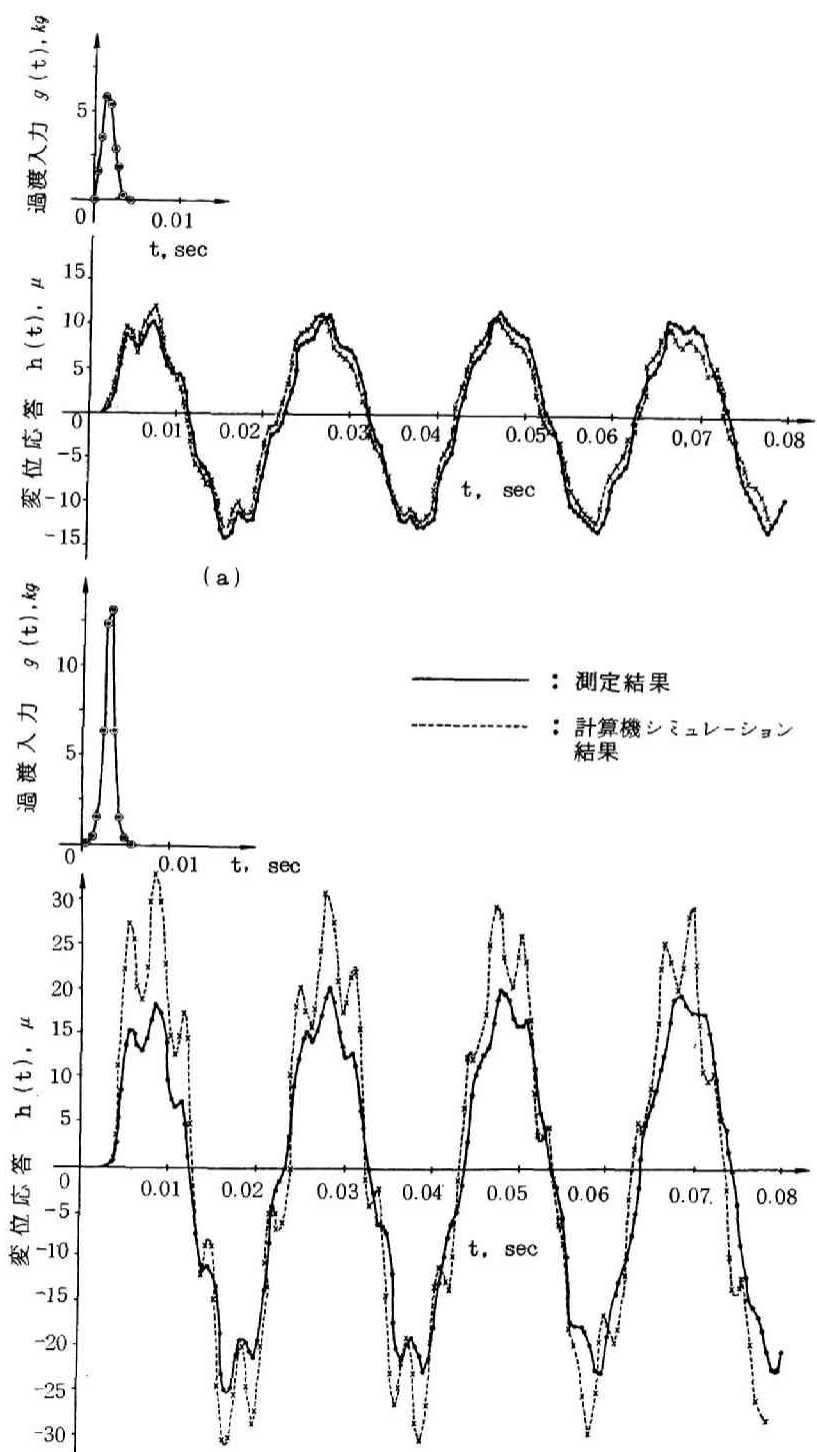
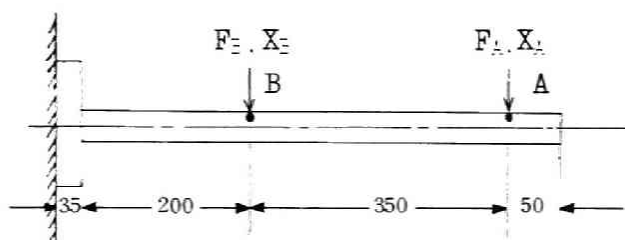


図5-10 過渡入力に対する変位応答の測定結果と計算機シミュレーション結果との対応

系としての伝達関数を定め、各次の共振振動数および減衰比が同じ状態において、モーダルフレキシビリティの分布が変わる場合に、過渡入力に対する応答がどのように変化するかを検討する。

図5-11は力の大きさが1kg、時間幅0.0005secのインパルスが加わった場合の変位応答を表わしており、(a)に

表5-2 過渡入力に対する応答計算のための片持ちはり計算モデルの形状と振動系の特性値



計算モデル

モデル系の振動特性値

	静コンプライアンス $\hat{f}_s, \mu/kg$	モード次数と 共振振動数	モーダルフレキシ ビリティ $\hat{f}_m, \mu/kg$	等価減衰比 ζ_m
① $(\frac{X}{F})_{A,A}$	4 3.6 9 4	1次モード (46.87Hz)	4 3.1 6 3	0.0 0 4
		2次モード (293.65Hz)	0.5 0 9	0.0 0 4
		3次モード (823.10Hz)	0.0 2 2	0.0 0 4
② $(\frac{X}{F})_{A,B}$	7.6 2 4	1次モード	8.0 7 9	0.0 0 4
		2次モード	-0.4 9 9	0.0 0 4
		3次モード	0.0 4 5	0.0 0 4
③ $(\frac{X}{F})_{B,B}$	2.1 0 5	1次モード	1.5 1 2	0.0 0 4
		2次モード	0.4 8 8	0.0 0 4
		3次モード	0.0 9 4	0.0 0 4

おける実線が表5-2の①の場合、そして(b)における破線と一点鎖線は②と③の場合である。(a)と(b)では横軸の時間軸の目盛は同一であるが縦軸の変位応答の目盛は異なっている。①では1次の共振モードの影響が支配的であり、変位応答が大きい。また③では2次、3次の共振モードの影響も大きく表われ、①および②の場合に比べ応答波形の形が著しく異なっている。この解析例では同一の構造体であってもインパルス加振を行う場合には加振点の位置によって系

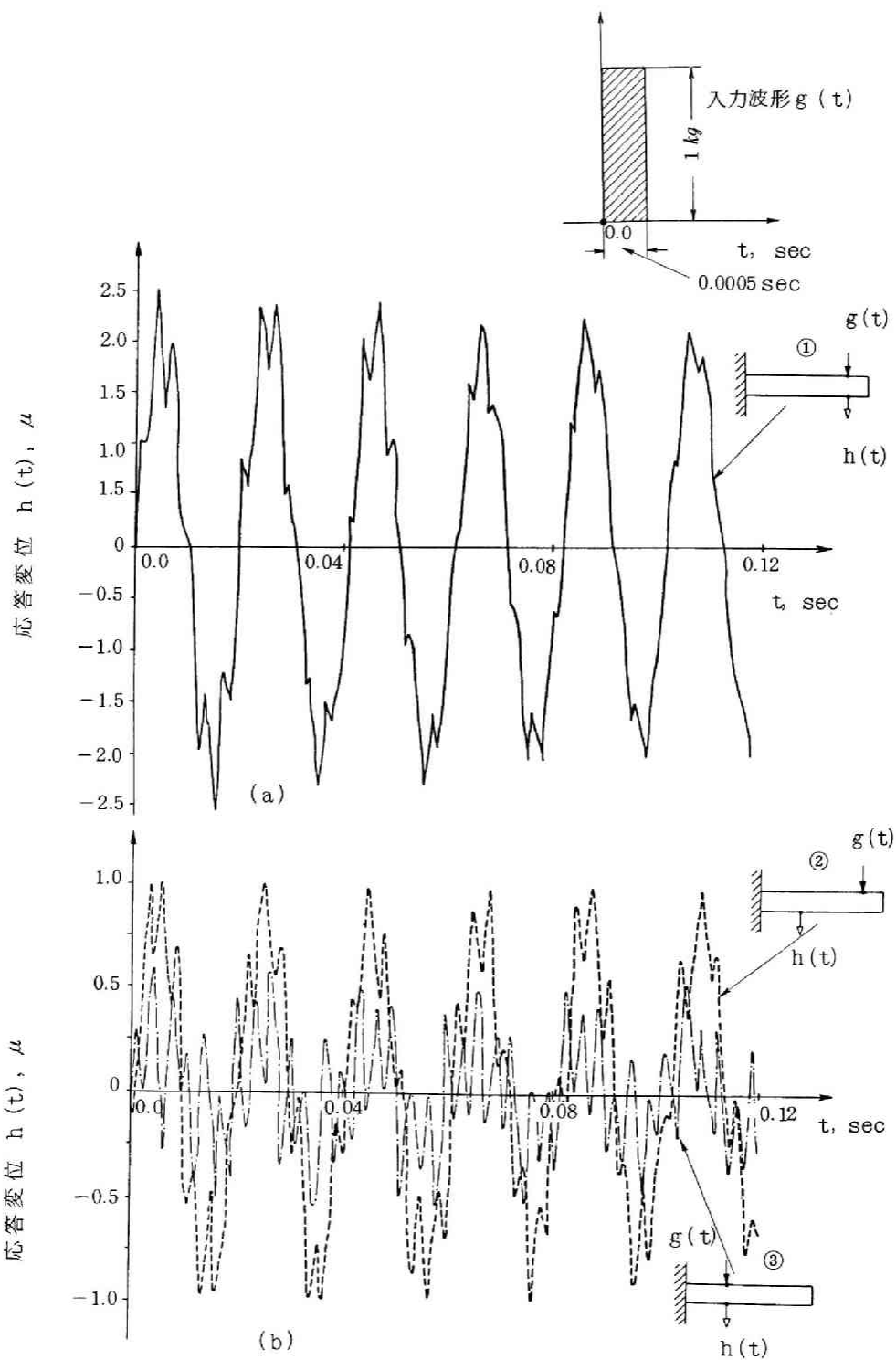


図 5-11 インパルス入力に対する 3 自由度計算モデルの変位応答

に生ずる応答の波形が著しく異なることが明確に示されている。その違いは系の伝達関数を表わす数学モデルの中のモーダルフロンクシビリティの値の配分にあることがこの例を通じて理解される。

5.3.3. 任意周期入力に対する応答の解析法

正弦波，方形波はもとより，三角波，のこぎり波などを含めた任意のしかし同一パターンの波形が一定の周期で繰返される入力に注目し，この入力に対する振動系の応答を求めるために5.3.2.で述べた過渡応答解析の手法を応用した方法を示す。

(i) 解析の原理

図5-12に示す時間軸 t 上の周期 T をもつ正の単位パルスの繰返しを用いて入力を作成する。この時間幅 ΔT の単位パルスの繰返しをフーリエ級数展開すると，次の(5-35)式のようなになる。

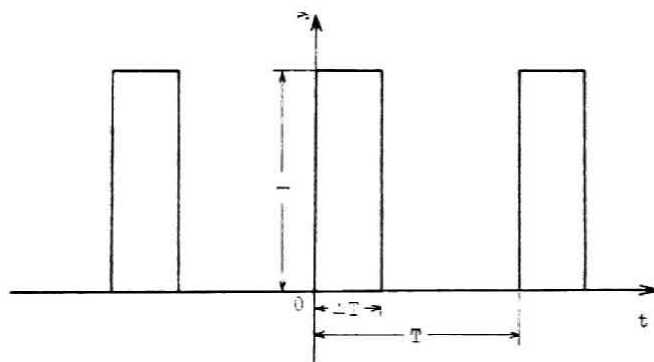


図5-12 周期 T の単位パルス入力

$$y(t) = \frac{\Delta T}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M} \sin\left(M\pi \frac{\Delta T}{T}\right) \cos\left(M\omega_1 t - M\pi \frac{\Delta T}{T}\right) \quad (5-35)$$

ここで $\omega_1 = 2\pi/T$, $M = 1, 2, 3, \dots$

この(5-35)式を用いて任意波形の周期入力を構成するには，多数のある時間ずれた一連のこのようなパルス入力をたし合わさればよい。いま，ある任意

周期入力が n 個のパルスの組合せによって構成されとし、そのうち第 i 番目のパルスの時間原点が図 5-13 に示すように $\sum_{j=1}^{i-1} \Delta T_j$ ずれているとすると、(5-35) 式より第 i 番目のパルス入力 $y_i(t)$ は、次の (5-36) 式のように求まる。

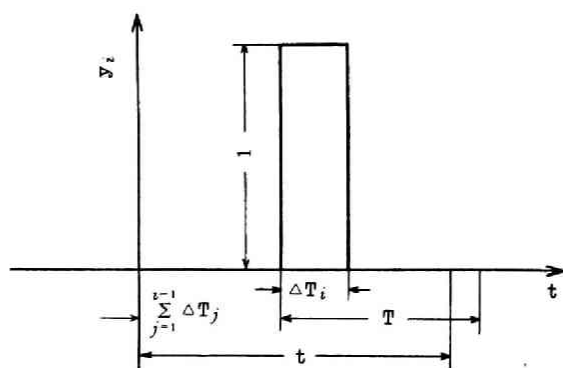


図 5-13 第 i 番目のパルス入力の説明図

$$y_i(t) = \frac{\Delta T_i}{T} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(m\pi \frac{\Delta T_i}{T}\right) \cos\left\{M\omega_1\left(t - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta T_j\right) - m\pi \frac{\Delta T_i}{T}\right\} \quad (5-36)$$

今この第 i 番目のパルスの力の大きさを \bar{y}_i とし、1 周期当り n 個のパルスが存在することより、図 5-14 に示すような任意周期入力 $g(t)$ は

$$g(t) = \sum_{i=1}^n \bar{y}_i y_i(t) \quad (5-37)$$

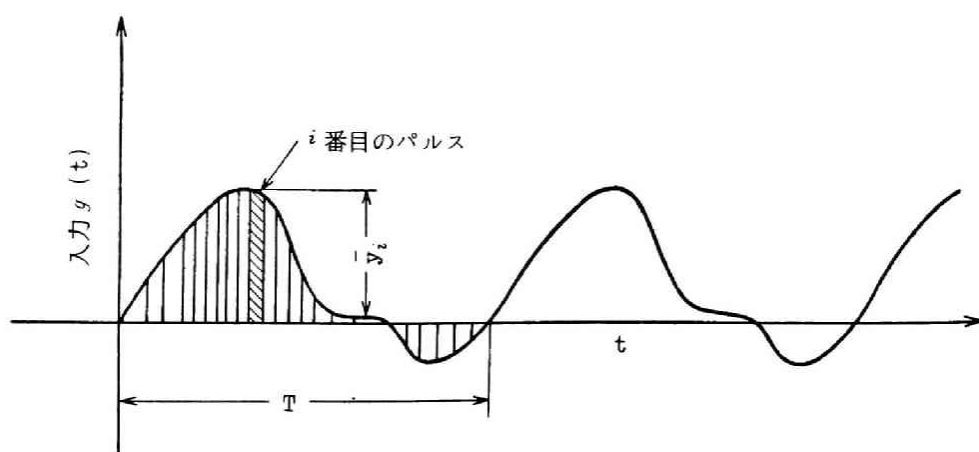


図 5-14 任意周期入力のパルス入力による表わし方の説明図

として定まる。

次に、第 i 番目のパルスに対する変位応答 $h_i(t)$ 、速度応答 $\dot{h}_i(t)$ および加速度応答 $\ddot{h}_i(t)$ はそれぞれ次の (5-38) 式、(5-39) 式および (5-40) 式として求まる。

$$h_i(t) = \bar{y}_i \left[\frac{\Delta T_i}{T} X_0 + \frac{2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} \frac{X_M}{M} \sin \left(M\pi \frac{\Delta T_i}{T} \right) \right. \\ \left. \cos \left\{ M\omega_I \left(t - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta T_j \right) - M\pi \frac{\Delta T_i}{T} + \varphi_M \right\} \right] \quad (5-38)$$

$$\dot{h}_i(t) = -\bar{y}_i \left[\frac{2\omega_I}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} X_M \sin \left(M\pi \frac{\Delta T_i}{T} \right) \right. \\ \left. \sin \left\{ M\omega_I \left(t - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta T_j \right) - M\pi \frac{\Delta T_i}{T} + \varphi_M \right\} \right] \quad (5-39)$$

$$\ddot{h}_i(t) = -\bar{y}_i \left[\frac{2\omega_I^2}{\pi} \sum_{M=1}^{\infty} M X_M \sin \left(M\pi \frac{\Delta T_i}{T} \right) \right. \\ \left. \cos \left\{ M\omega_I \left(t - \sum_{j=1}^{i-1} \Delta T_j \right) - M\pi \frac{\Delta T_i}{T} + \varphi_M \right\} \right] \quad (5-40)$$

ここで $X_M : \frac{M\omega_I}{2\pi}$ Hz における伝達関数のゲイン

$\varphi_M : \frac{M\omega_I}{2\pi}$ Hz における伝達関数の位相差

これより求めたい任意周期入力に対する振動系の変位応答 $h(t)$ 、速度応答 $\dot{h}(t)$ および加速度応答 $\ddot{h}(t)$ は、次の (5-41) 式のように n 個のパルスに対する応答をたし合せて求まる。

$$\left. \begin{aligned} h(t) &= \sum_{i=1}^n h_i(t) \\ \dot{h}(t) &= \sum_{i=1}^n \dot{h}_i(t) \\ \ddot{h}(t) &= \sum_{i=1}^n \ddot{h}_i(t) \end{aligned} \right\} \quad (5-41)$$

(ii) 解 析 例

この任意周期入力に対する応答の解析法を用いて計算を行った例を示す。

(1) 3 自由度計算モデル（モーダルフレキシビリティの相違による変位応答の変化）

図 5-15 中の表に示す共振振動数，モーダルフレキシビリティおよび減衰比の値をもつ①，②および③の 3 種類の振動モデルに，上図に示す周期入力がかわった場合の変位応答を図 5-15 に表わしている。入力波形は，1 つの周期を 4 つのパルス入力のつらなりとしている。

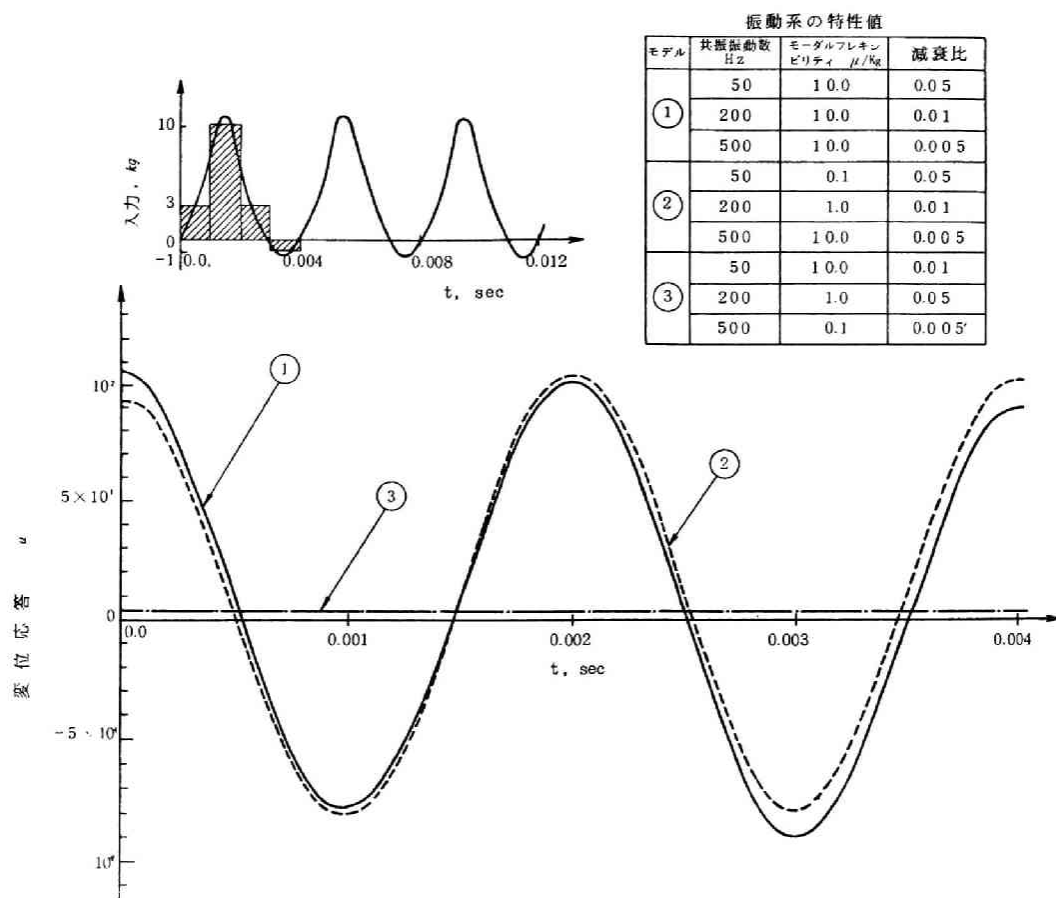


図 5-15 周期振動入力に対する 3 自由度計算モデルの変位応答計算結果

2) 横型フライス盤における横振切削力に対する応答解析

図5-16は実機の横型フライス盤について振動特性を計算するために構成した数学モデルを示しており、はり要素と、種々の案内面および軸受部を柔結合部要素でモデル化し、切削点におけるA B間の周波数応答は第Ⅱ章で述べた動剛性合成法電子計算機プログラムシステムにより求めた。はり要素は材料内部減衰、柔結合部は等価な減衰係数で減衰能も考慮してシミュレーションを行っている。図5-17の実線はこれより得られた切削点でのA B間のY方向の相対加振力に対するY方向の相対変位に関する相対リセプタンスの周波数応答を表わしている。これより、500 Hzまでの振動数範囲に図中に示すように7つの共振振動数が求まっており、各共振モードにおける切削点のY方向の

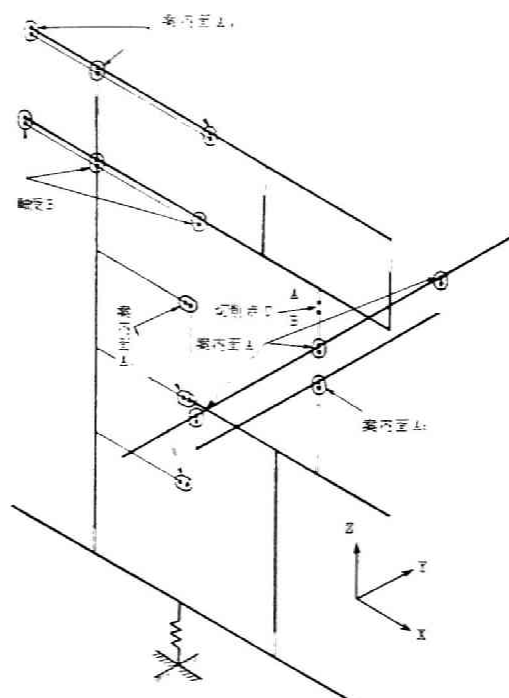


図5-16 横型フライス盤の振動特性計算のための数学モデル

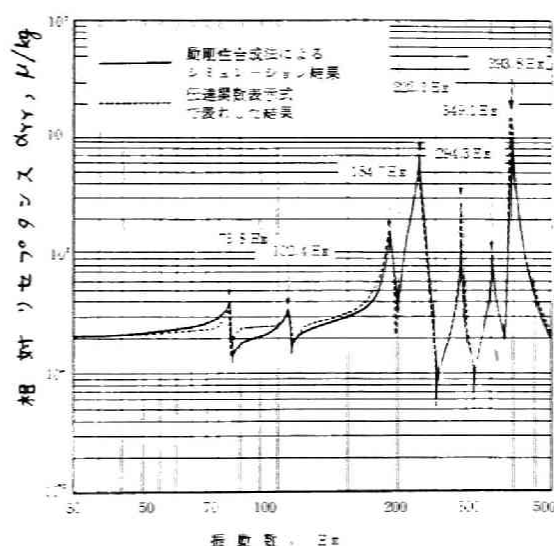


図5-17 横型フライス盤切削点A B間のY方向の相対加振力に対するY方向の相対変位に関する相対リセプタンスの計算値

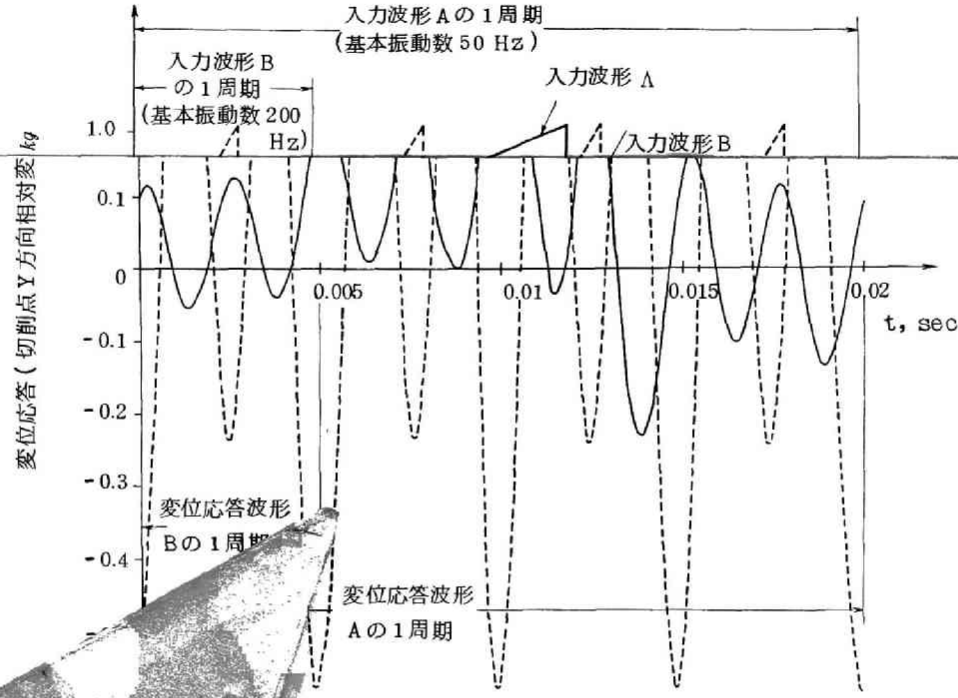
相対リセプタンスに関するモーダルフレキシビリティ f_m および等価減衰比 ζ_m の計算値を表 5-3 に示す。

表 5-3 横型フライス盤切削点 Y 方向の相対リセプタンスに関する共振振動数，
モーダルフレキシビリティおよび等価減衰比

共振振動数 ω_m Hz		モーダルフレキシビリティ f_m μ/kg		等価減衰比 ζ_m	
ω_1	7 3.8	f_1	0.733×10^{-3}	ζ_1	0.963×10^{-2}
ω_2	1 0 2.4	f_2	0.278×10^{-4}	ζ_2	0.292×10^{-2}
ω_3	1 8 4.7	f_3	0.142×10^{-1}	ζ_3	0.486×10^{-1}
ω_4	2 2 2.1	f_4	0.744×10^{-1}	ζ_4	0.519×10^{-1}
ω_5	2 9 4.3	f_5	0.138×10^{-1}	ζ_5	0.330×10^{-1}
ω_6	3 4 9.1	f_6	0.732×10^{-2}	ζ_6	0.168×10^{-1}
ω_7	3 9 3.8	f_7	0.105×10^0	ζ_7	0.158×10^{-1}

この 7 次までの各共振モードにおける共振振動数，モーダルフレキシビリティおよび減衰比の値を (5-1) 式の入力と振動変位の間の周波数伝達特性式に代入し，切削点の A B 間の相対加振力に対する相対変位の伝達特性を式の形で表示し，本章第 3 節の任意入力に対する応答の解析法に適用するための準備を行う。この 7 次の共振モードまでのモーダルフレキシビリティの和は静コンプライアンスの 98 % 程度であり，図 5-17 の点線で示すこの伝達特性の表示式の各振動数に対する応答は，実線のシミュレーション値とよく一致しており，7 次までの共振モードで切削点 A B 間の Y 方向の振動特性を近似的に表わせることがわかる。

次に，この振動系への入力の例として，切削力を模擬化した図 5-18 (a) に示す 2 種類の入力波形を想定する。実際にフライスやエンドミルで切削を行う時に，工具から入力される断続的な振動力は，三角波や種々の方形波になることが過去からの研究において紹介⁵⁻⁴⁾されていることより，ここでは三角波状の入力波形を用いた。図 5-18 (a) の実線は 1 周期の時間幅が 0.0 2 sec で入



位応答波形 (各次の共振モードの減衰比を 100 分の 1 にした場合)

ける模擬切削力 (図 5-16 の切削点の Y 方向相対力) に対する変位応答 (切削点) の計算結果

で
大
であ
変
と破
を表
ル
と
であ
って
この

従
べた。
幾
破
の

相
の

「

イ
に
で
を
プ
示
り
せ
る
示
時
と
の

力の基本振動数は $1/0.02 = 50 \text{ Hz}$ 、破線は、1 周期の時間幅が 0.005 sec で入力の基本振動数は $1/0.005 = 200 \text{ Hz}$ であり、両者とも力のピーク値の大きさは 1 kg で、入力が入っている時間と入っていない時間の比は、 $3:2$ である。これらの入力が入力点の A B 間の Y 方向に加わった場合の同方向の相対変位の応答を図 5-18 (b) に示す。実線および破線はそれぞれ入力波形の実線と破線に対応している。両者とも 200 Hz と 400 Hz 付近の振動数成分が顕著に表われており、表 5-3 に示されるように 4 次と 7 次の共振モードのモーダルフレキシビリティが大きいことからこのことが理解される。

図 5-18 (c) は各共振モードの減衰比の値だけを表 5-3 の値の $1/100$ と小さくし、図 5-18 (b) の場合と同じ入力波形に対する応答を求めたものである。図 5-18 (b) と (c) を比較すると、変位応答は多少 (c) の場合に大きくなっている程度であり、減衰比の値よりもモーダルフレキシビリティの値の方がこの場合には応答に大きな影響をもっていることがわかる。

5.3.4. 結 言

実動状態にある機械システムの実動入力に対する応答を解析するために、従来の解析手法とは異なる手法を開発し、その解析原理と解析例について述べた。この解析法は、周波数領域上で得られた多自由度振動系として表わされる機械システムに、時間軸上の確定的な任意形状をもった実動入力に加わった場合の応答を求めるものであり、実動状態の振動特性を解析する上での基本となるものである。この解析手法の特徴は次のようである。

1. 振動系の自由度の増加による応答の計算時間の増加はほとんどなく、短い計算時間で多自由度系の任意入力に対する応答を求めることができる。
2. 入力波形のデータを容易につくることができ、計算可能な波形の形状はまったく任意である。

第 4 節 結 論

本章は第Ⅳ章までの周波数領域上の振動特性の解析をもとに、それを実動状態の解析に結びつけるための解析原理と手法を示した。第2節は、振動系の周波数領域での伝達特性を第Ⅲ章までの解析により得られた結果を用いて表示する方法を述べ、第3節は、この振動系に時間軸上で表わされる任意の形状をもった過渡および任意周期入力に加わった場合の応答を求める手法を述べた。これにより実動状態の振動特性を解析するための解析原理が完成したわけで、本章の図5-3に示すように実動状態の動特性を設計と結びつけて解析することができる。さらに、実動状態の動特性の設計面からの改善および最適化は、周波数領域上での特性の改善および最適化を媒体として、第Ⅳ章で述べたのと類似の手法により実行することが可能である。

結

論

工作機械の振動特性を解析し、さらにその振動特性に関する最適設計を行う方法を確立することを目的として第Ⅰ章から第Ⅴ章にわたる研究を行った。

まず第Ⅰ章では、機械構造物の振動特性を解析する場合の問題点を明らかにし、その問題点を解決するための基本的な因子としてエネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力の3つのファクターを挙げ、それぞれの概念の定義と説明および種々の特性の解析を行った。この3つの基本的因子は本論文のすべての章の基本となっているものである。さらに工作機械の振動特性に関する解析の究極の目的の1つである最適化設計を行う上での基本原理を述べ、最も防止が困難でかつ設計の段階で解析を必要とする再生型自動びびりに関する最適化設計を支配するパラメータの解析を行い、そしてそのパラメータに基づいた最適化設計の基本的な手順を述べた。

第Ⅱ章では、機械構造物の静剛性および振動特性を理論的に解析するために、リセブタンス合成法および動剛性合成法による電子計算機プログラムシステムを開発し、その解析の原理と解析例を述べた。リセブタンス合成法は、構造物を分布質量分布定数系はりモデルとして解析できる。また動剛性合成法は、通常の有限要素、骨格集中質量要素および分布質量分布定数系要素によるモデル化を合わせて行うことができ、さらに減衰を含む機械構造物の振動特性を従来の手法より物理的に厳密に解析することが可能である。これらの手法では通常の解析手法では求められていない、第Ⅰ章で述べた振動特性解析の基本的な因子であるエネルギー分布、モーダルフレキシビリティおよび振動内部力を求めることができ、本論文での理論解析の手段としてすべての章で用いている。

第Ⅲ章では、機械構造物の振動特性を解析する上で最もその評価が困難な、機械要素または部材を接合する代表的な結合部であるボルト結合部、溶接結合部、および案内面の動的剛性と減衰能の解析をそれぞれの結合部を単純化した実験モデルと新しく考案した方法により精度よく測定することを第Ⅱ章で開発した

電子計算機プログラムシステムを併用して行った。これにより各種結合部の定性的な特性が明らかとなり、定量的な値を得るための手法が示された。次に、実際の機械における結合部の動的剛性および減衰能の解析として、動圧軸受をもつ円筒研削盤のホイールヘッド主軸の振動特性の解析および工作機械テーブル案内面の減衰能の測定法とその解析結果について述べた。さらに、結合部と並んで剛性の評価が困難である複雑な形状をもつ構造部材の剛性を正しく評価解析するために、従来評価が最も困難であったねじり剛性を例としてその評価法を述べた。本章の解析により機械構造を構成する各部の特性がより明らかとなり、第Ⅱ章に述べた電子計算機プログラムによる解析をより正確に行うことが可能となった。

第Ⅳ章は、第Ⅰ章の振動特性の解析および最適化の原理に基づき、さらに第Ⅱ章の解析手法を用いて、モーダルフレキシビリティおよびエネルギー分布のバランスに着目した工作機械の再生型自励びり振動に関する最適設計の具体的な手法を述べた。まず、単一の固有モードに着目した場合の振動特性の改善および最適化設計の手法を示し、有効性を適用例で実証した。次に、最適化をさらに発展させ、複数の固有モードに着目した場合の振動特性の改善および最適化設計の手法を述べ、適用例を示した。本章により振動特性解析の究極の目的の1つである最適設計を行うことが可能となった。

第Ⅴ章は、第Ⅱ章および第Ⅲ章で明らかとなった構造物の周波数領域上で表わされる固有の特性を用いて、機械が目的とする作業を行っている実動状態の時間軸上で表わされる振動特性を解析するための基本なる解析原理を述べた。まず構造物の多自由度振動系として表わされる周波数領域上の伝達特性を、入力と振動変位および入力と振動内部力の間で表示する方法を解析し、次にこの構造物に任意形状をもつ入力として過渡および任意周期入力加わった場合の応答を精度よくかつ短時間に求める従来とは異なる手法の解析原理を述べ、その適用例を示した。本章の解析により実動状態にある機械の振動特性と設計とを第Ⅳ章までの解析を媒体として結びつける原理が明らかとなった。

本論文は，工作機械が実際に目的とする作業を行っている状態の種々の振動特性を設計段階で把握し，その特性に関する最適設計を得るという研究の基礎となる部分を完成させたものであり，さらに今後研究を積み上げ発展させていく計画である。

また，本論文の研究は工作機械を対象としたものではあるが，ここで得られた研究成果の多くは工作機械以外の他の機械に適用できるものとする。

謝

辞

本研究を行うに当って終始御懇篤な御指導と御鞭撻とを賜わった京都大学教授奥島啓式博士と京都大学助教授星鉄太郎博士に心からお礼申し上げます。

また、研究の遂行に対して御協力下さった京都大学工学部製造工学研究室の皆様感謝いたします。

さらに実験モデルの提供および製作に御協力いただいた遠州製作(株)、(株)オーエム製作所、新日本工機(株)、東洋工業(株)、寿工業(株)、三菱重工(株)およびシギャ精機(株)に厚くお礼申し上げます。

参 考 文 献

第 1 章

- 1 - 1 岡村健二郎, 松原十三生: 周波数応答実験から伝達関数を決定する方法, 精密機械, 37, 4 (1971) 282.

- 1 - 2 R.E.D. Bishop and D.C. Johnson: The Mechanics of Vibration, Cambridge at the University Press (1960).

- 1 - 3 T. Hoshi: Mechanism, Diagnosis, and Control of Several Types of Machining Chatter, Proc. 3rd North American Metalworking Research Conf., Carnegie Press, Pittsburgh, Pennsylvania, (5-1975) 788.

- 1 - 4 H.E. Merritt: Theory of Self-Excited Machine Tool Chatter, Trans-ASME, 87, 4, B (1965) 447.

第 II 章

- 2 - 1 O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill, London (1967).
- 2 - 2 S. Taylor and S. A. Tobias: Lumped-constants Method for the Prediction of the Vibration Characteristics of Machine Tool Structures, Proc. 5th Int. M.T.D.R. Conf. Pergamon, (1964).
- 2 - 3 S. Taylor: A Computer Analysis of an Open Side Planing Machine, Proc. 6th Int. M.T.D.R. Conf. Pergamon, (1965).
- 2 - 4 A Cowley and M.A. Fawcett: Analysis of Machine Tool Structure by Computing Techniques, Proc. 8th Int. M.T.D.R. Conf. Pergamon, (1967).
- 2 - 5 佐田登志夫, 宮本 博, 高島信行ほか: 有限要素法による工作機械の動剛性の解析, 精密機械, 37, 3 (1971) 218.
- 2 - 6 H. Sato et al. : Development of the Finite Element Method for Vibration Analysis of Machine Tool Structure and its Application, Proc. 14th Int. MTDR Conf., (1974).
- 2 - 7 R.E.D. Bishop and D.C. Johnson: The Mechanics of Vibration, Cambridge at the University Press (1960).
- 2 - 8 日本機械学会研究協力部会 — 工作機械の剛性および切削性能の向上に関する研究分科会研究成果報告書「工作機械の動的構造解析プログラム・マニュアル集」, (1974).

- 2-9 後藤尚男：構造物の基礎，土木建築構造物の地震応答解析研修会テキスト版4，日本鋼構造協会，（1966）。
- 2-10 T. Hoshi: Parameters of Mounting and Foundation Affecting the Structural Dynamics of Machine Tools, Mem. Fac. Engg., Kyoto Univ., 36, Part 2 (April 1974) 105.
- 2-11 沢潟作男：機械基礎の設計と据付，丸善（1968）。
- 2-12 たとえば J.S. Przemieniecki: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill.
- 2-13 B. J. Lazan : Damping of Materials and Members in Structural Mechanics, Pergamon Press (1968)
- 2-14 動剛性合成法電子計算機プログラムマニュアル，群制御工作機械システムの自動保守に関する研究．II．研究成果報告書，日本機械学会（1976）。

第 Ⅲ 章

- 3- 1 伊東誼, 益子正己: 工作機械のボルト結合部剛性に関する基礎研究
(第一報), 日本機械学会論文集, 34, 262(1968)1159.

- 3- 2 伊東誼, 益子正己: ボルト結合部の減衰能に関する研究(第一報),
日本機械学会論文集, 37, 295(1971)622.

- 3- 3 伊東誼, 益子正己: ボルト結合部の減衰能に関する研究(第二報),
日本機械学会論文集, 40, 335(1974)2058.

- 3- 4 橋本文雄, 久米靖文: 工作機械構造物中接合部の剛性に関する研究
— モデルによる接合面の信号伝達特性 — 工作機械の剛性および切
削性能の向上に関する研究分科会研究成果報告書, 日本機械学会,
(1974)440.

- 3- 5 R.H. Thornley : Some Static and Dynamic Characteristics
of Bonded Machined Joint Faces, Proceedings of the 14th
MIDR Conf. (1974) 79.

- 3- 6 阿武芳朗, 益子正己, 伊東誼ほか: 鋼板溶接構造の減衰能に関する研
究, 日本機械学会論文集, 36, 284(1970)663.

- 3- 7 Maria Gianasso : The Damping Coefficient in Welded Bodies
(A Theoretical Study, Experimental Results), MECCANICA,
1971.

- 3- 8 R. Bell, M. Burdekin : Plain Slideways, The Institution of Mechanical Engineers, 1970.
- 3- 9 M. Polacek, Z. Vavra : The Influence of Different Types of Guideways on the Static and Dynamic Behavior of Feed Drives, Advances in MTDR (1967) Pergamon Press 1127.
- 3-10 飛田孝, 向坂成夫: 各種案内面の特性について, 群制御工作機械の自動保守システムに関する研究Ⅱ 研究成果報告書, 日本機械学会, (1975) 253.
- 3-11 P. F. Rogers, G. Boothroyd : Damping at Metallic Interfaces Subjected to Oscillating Tangential Loads, Transactions of the ASME, (1975) 1.
- 3-12 J. A. Nelder and R. Mead : A Simplex Method for Function Minimization, Computer Journal, Vol. 7 (1965) 308.
- 3-13 M. Polacek & Z. Vavra : The Influence of Different Type Guide Ways on the Static and Dynamic Behavior of Feed Drives, Proc. MTDR Conf., (1967) 1127.
- 3-14 金井 彰ほか: 誘任案内テーブルとその駆動機構の試作および評価, 昭和48年度精機学会春季大会学術講演会前刷(1973)15.

- 3-15 R. Bell & M. Burdekin : The Frictional Damping of Plain Slide Ways for Small Fluctuations of the Velocity of Sliding, Proc. MTDR Conf., (1967) 1107.
- 3-16 V. V. Kaminskayia : Calculation and Research on Machine Tool Structures and Foundations, Proc. of 8th Int. MTDR. Conf (1967) 139, Pergamon Press.
- 3-17 R. H. Thornley and P. Kumar : Some Factors Influencing the Design of Box-type Machine Tool Structural Element, Proc. of 10th MTDR Conf. (1969) 763.
- 3-18 S. Hinduja and A. Cowley : The Finite Element Method Applied to the Deformation Analysis of Thin Walled Columns, Proc of 12th MTDR Conf. (1972) 455, Macmillan.
- 3-19 西条徳行他：工作機械のベッド，コラムの剛性に関する研究，三菱重工技報 Vol. 11, No. 1 (1974-1) 74.
- 3-20 たとえば小松定夫：薄肉構造物の理論と計算，山海堂。

第 N 章

- 4- 1 J. E. Taylor : Minimum Mass Bar for Axial Vibration at Specified Natural Frequency, AIAA Journal Vol. 5, No. 10 (1967) 1911.
- 4- 2 J. E. Taylor and C. Y. Liu : Optimal Design of Columns, AIAA Journal, Vol. 6, No. 8 (1967) 1497.
- 4- 3 M. J. Turner : Design of Minimum Mass Structures with Specified Natural Frequency, AIAA Journal, Vol. 5, No. 3 (1967) 406.
- 4- 4 W. Prager and J.E. Taylor : Problems of Optimal Structural Design, Trans. of ASME.
- 4- 5 F. I. Niordson : On the Optimal Design of a Vibration Beam, Quaterly of Applied Mathematics, Vol. 23, No. 1 (1965).
- 4- 6 Icerman : Optimal Structural Design for Given Dynamic Deflection, International Journal of Solids and Structures, Vol. 5 (1969).
- 4- 7 D. L. Sippel, K. William and H. Warner : Minimum- Mass Design of Multielement Structures under a Frequency Constraint, AIAA Journal, Vol. 11, No. 4 (1973) 483.

- 4- 8 E. F. Masur : Optimal Structural Design for a Discrete Set of Available Structural Members, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (1974) 195.
- 4- 9 奥村敦史, 山川 宏 : 振動を考慮した構造物の最適設計について, 日本機械学会講演論文集, № 730-14 (1973-4).
- 4-10 J. A. Nelder and R. Mead : A Simplex Method for Function Minimization, Computer Journal, Vol. 7 (1965) 308.

第 V 章

- 5 - 1 石原国彦, 船川正哉: 任意外力を受ける多自由度系の応答解析, 日本機械学会講演論文集, № 740-12 (1974-11) 67.

- 5 - 2 清水信行, 渡辺嘉二郎, 山本鎮男: 構造解析のための直接数値積分法について, 日本機械学会講演論文集, № 740-12 (1974-11) 63.

- 5 - 3 R.L. Johnson and J.B.Rea : Importance of Extending Nyquist Servomechanism Analysis to Include Transient Response, J. Aero, Sci., 18, 1 (1951) 43.

- 5 - 4 J. Tlustý : Dynamics of Cutting Forces in End Milling, Annals of the CIRP, 24, 1 (1975).

付 録

動剛性合成法電子計算機プログラムシステム マニユアルの概要

1. プログラムシステムの概説

1.1 プログラムシステムの目的と機能

このプログラムシステムは機械構造物の静剛性および振動特性を解析し、さらにその特性に関する最適化設計に必要な情報を得るためのものであるが、以下に示す計算結果が出力される。

- (1) 静コンプライアンス
- (2) 周波数応答
- (3) 共振振動数
- (4) 静的および共振状態でのモード形
- (5) 共振モードでの問題とする構造上の点におけるモーダルフレキシビリティと静コンプライアンスに対する比
- (6) 静的および共振状態での復元、慣性および減衰エネルギー分布
- (7) 各共振モードでの減衰比
- (8) 接合面および結合部での振動内部力および加振力と振動内部力の比

この計算結果の中には、従来の解析プログラムでは求められていないものを多く含んでいるが、目的とする解析を行う上に重要な情報を与えるものであると考える。またプログラムにおいては、必要な情報だけを選択して出力するようにしている。

この解析プログラムの基本形は、静剛性および振動特性を解析評価する機能をもつが、さらに第Ⅳ章で使用する最適設計のためのサブプログラム、第Ⅲ章第2節で使用する未知の多変数を自動決定するサブプログラム、第Ⅴ章で使用する任意入力に対する応答を解析するサブプログラム等を付け加えることによ

り種々の発展的な解析が可能である。

1.2 プログラムシステムの構成

1.2.1 概要

動剛性合成法電子計算機プログラムシステムは、大きく次の3つに分けられる。

- (a) 構造物の静剛性および振動特性解析プログラムシステム
- (b) 最適設計プログラムシステム

エネルギーバランスおよびシンプレックス法を用いて最適化設計を行う。

- (c) 多変数自動決定プログラムシステム

未知の変数をシンプレックス法等を用いて自動的に決定する。

このうち、(b)と(c)は、(a)のプログラムシステムにそれぞれの機能を行うためのサブプログラムを付加したものであり、このマニュアルには、(a)のプログラムシステムについてのみ記載する。

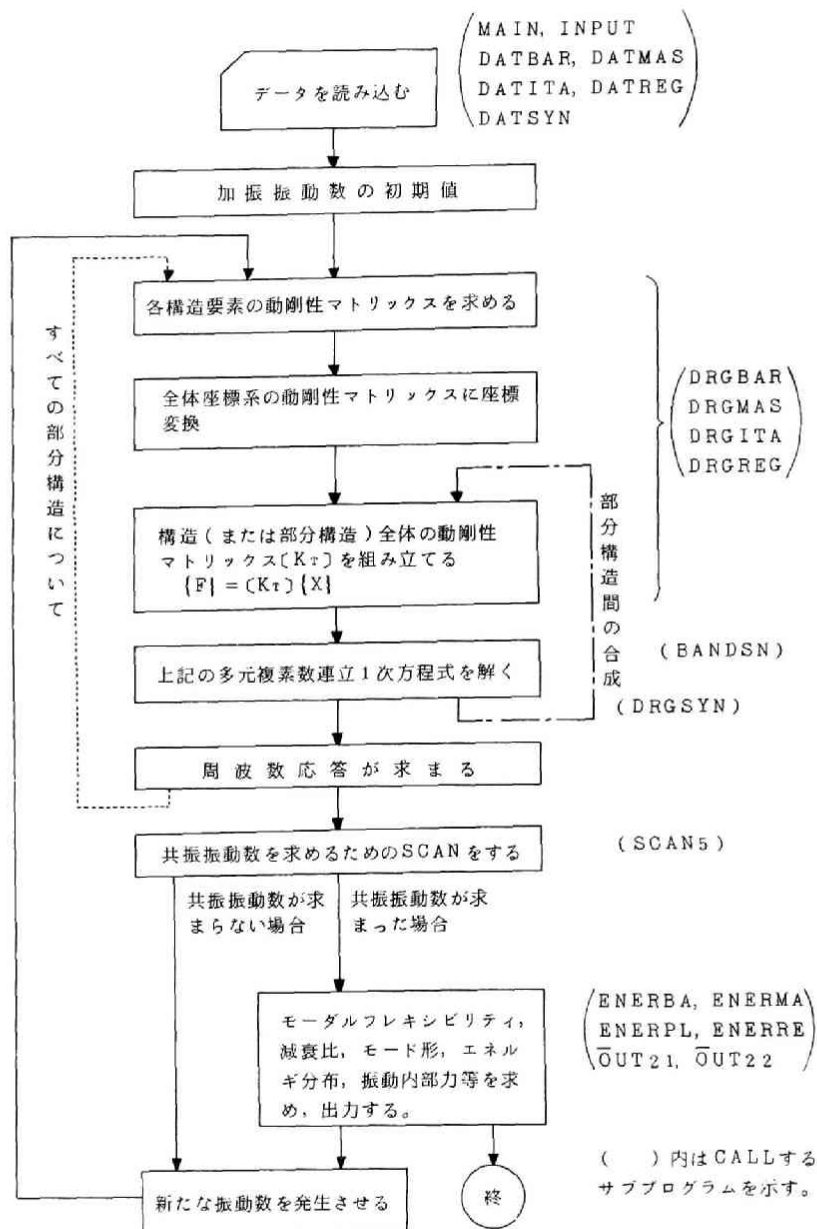
(a)のプログラムシステムの基本形は、減衰特性をも含む多数の部分構造により結合された機械構造の静剛性および振動特性解析プログラムである。1つの機械構造でもモデル化がはり構造のみや、単純な場合は1つの部分構造としての解析が可能である。また、減衰を含まないシミュレーションにおいては減衰の項のデータをブランクのままにすればよい。

1.2.2 メインプログラムおよびサブプログラムの機能

計算の基本的な流れは、メインプログラムで指定され、目的とする解析に必要なサブプログラムを適宜呼び出す。ここでは、メインプログラムにおける計算の基本的な流れと、サブプログラムをその機能別に示す。

(i) メインプログラム

付図1に示すように計算における基本的な流れを指定し、目的の計算に必要なサブプログラムをCALLする。また周波数応答計算のためのデータを読み込む。付図1において、部分構造の動剛性を合成しない場合は、実線の矢印の



付図1 動剛性合成法電子計算機プログラムシステムにおける計算の基本的な流れ

ように流れる。部分構造の動剛性を合成するときは、最初に分割した部分構造の数だけ点線の矢印の流れを繰り返し、そして部分構造間の動剛性を合成するために一点鎖線の矢印の流れを必要な合成回数だけ繰り返し、その後実線の矢印を部分構造の動剛性を合成しない場合と同様に流れる。以上の流れを各振動数に対して行い、目的とする周波数応答が得られる。

(ii) データ読み込み用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
I N P U T	各構造要素の数、節点数等を読み込む。
D A T B A R	はり要素についてのデータを読み込む。
D A T M A S	集中質量要素についてのデータを読み込む。
D A T I T A	長方形平板要素についてのデータを読み込む。
D A T R E G	柔結合部要素についてのデータを読み込む。
D A T S Y N	部分構造の動剛性合成に必要なデータを読み込む。

(iii) はり要素動剛性計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
D R G B A R	はり要素の動剛性マトリックス $[K] - \omega^2[M] + i[C]$ を求め、部分構造全体の動剛性マトリックスを組み立てる。
K B A R	有限要素はり要素剛性マトリックス $[K]$ を定める。
M B A R	有限要素はり要素質量マトリックス $[M]$ を定める。
B U N P B A	分布質量はり要素動剛性マトリックスを定める。この場合動剛性マトリックスはリセプタンス法と同じ解析式より導いている。
D M B A R H	はり要素の減衰マトリックス $[C]$ を定める。ヒステレティック減衰としている。
T R A B A R	はり要素の局所座標系と全体座標系の間の座標変換マトリックスを定める。

(iv) 集中質量要素動剛性計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
D R G M A S	集中質量要素の質量マトリックスを定め、動剛性マトリックスを求め、部分構造全体の動剛性マトリックスを組み立てる。

(v) 長方形平板要素動剛性計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
D R G I T A	長方形平板要素の動剛性マトリックス $[(K) - \omega^2(M) + i(C)]$ を求め、部分構造全体の動剛性マトリックスを組み立てる。
K E L I T A	長方形平板要素の剛性マトリックス $[K]$ を定める。
M E L I T A	長方形平板要素の質量マトリックス $[M]$ を定める。
D M I T A H	長方形平板要素の減衰マトリックス $[C]$ を定める。ヒステレティック減衰としている。
T R A I T A	長方形平板要素の局所座標系と全体座標系の間の座標変換マトリックスを定める。

(vi) 柔結合部要素動剛性計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
D R G R E G	柔結合部動剛性マトリックスを計算し、部分構造全体の動剛性マトリックスを組み立てる。

(vii) 部分構造の動剛性合成計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
D R G S Y N	部分構造の動剛性を合成する。

(viii) 多元複素数連立1次方程式を解くサブプログラム

サブプログラム名	機 能
BANDSN	多元の複素数連立1次方程式 $\{F\} = ([K] - \omega^2[M] + i[C])\{X\}$ をガウスの消去法で解く。この解法においてバンドマトリックス法を用いている。

(ix) 共振振動数を効率良く求めるためのサブプログラム

サブプログラム名	機 能
SCAN5	共振振動数付近を1自由度モデルと近似し、周波数応答より共振振動数を推定することを繰り返し、精度の判定をして必要十分な精度で求めれば、その振動数を共振振動数とする。

(x) エネルギー分布および振動内部力計算用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
ENERBA	はり要素について復元、慣性および減衰エネルギー分布と各節点での内部力を計算する。
ENERMA	集中質量要素について慣性エネルギー分布と各節点での内部力を計算する。
ENERPL	長方形平板要素について、復元、慣性および減衰エネルギー分布と各節点での内部力を計算する。
ENERRE	柔結合部要素について復元および減衰エネルギー分布を計算し、さらに加振点入力と結合部内部力との比 C_{ij} を計算する。

(xi) 計算結果出力用サブプログラム

サブプログラム名	機 能
OUT21	すべての節点のモード形(各節点の変位量)を出力する。
OUT22	変位ピックアップ点での変位のみ出力する。2節点間の相対変位を求めるときはこのサブプログラムをCALLする。

2. プログラムシステムの使用法の概要

2.1. 機械構造のモデル化

機械構造をいくつかの部分構造に分割する。ただし、比較的少ない数の構造要素で機械構造をモデル化できる場合には1つの部分構造としての計算を行えばよく、分割の必要はない。たとえば、はり、集中質量および柔結合部要素のみでモデル化する場合には、多くの場合分割しなくてもよい。次に、各部分構造を次のような構造要素でモデル化する。

(イ). はり要素

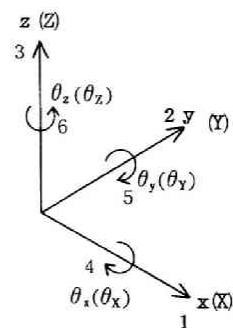
(ロ). 集中質量要素

(ハ). 長方形平板要素

(ニ). 柔結合部要素

各部分構造で、それぞれの要素において1から順番にサブシステム番号を別々に付ける。また、これらの構造要素に別の構造要素を追加することは容易であるが、本マニュアルに述べるプログラムシステムでは、上の4つの構造要素によりモデル化を行っている。このうちはり、長方形平板および柔結合部要素においては減衰能もシミュレーションする。

各構造要素には、それぞれ固有の座標系が付けられており、これを局所座標系($x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)と呼ぶ。一方機械構造全体の共通の基準となる座標系を全体座標系($X, Y, Z, \theta_X, \theta_Y, \theta_Z$)と呼ぶ。両者は直角座標であり、各座標方向の間の位置関係は付図2に示すごとくである。ここで、各軸の矢印をみて右回りの回転方向の座標を $\theta_x, \theta_y, \theta_z$ ($\theta_X, \theta_Y, \theta_Z$)とする。したがって1節点に6つの座標をもち、 $x(X)$ 軸を第1軸、 $y(Y)$ 軸を第2軸、 $z(Z)$ 軸を第3軸、 $\theta_x(\theta_X)$ 軸を第4軸、 $\theta_y(\theta_Y)$ 軸を第5軸、 $\theta_z(\theta_Z)$ 軸を第6軸と呼ぶ。



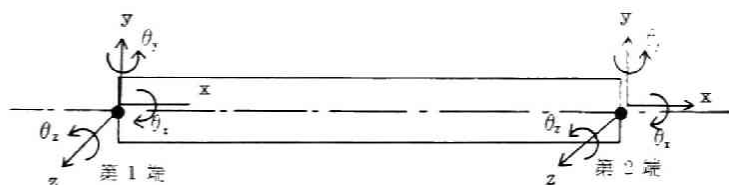
付図2 座標系

以下に各構造要素の座標系について述べる。

(イ) はり要素

はり要素としては、通常の有限要素法で用いられると同じ集中定数系はりとし、リセプタンス法で用いていると同じ分布質量分布定数系はりの2種類を用意しており、目的に応じてどちらかを選択する。両者とも2端(END)をもち、座標系を付図3に

示す。図において左端をはり要素の第1端、右端を第2端とす



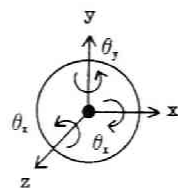
付図3 はり要素

る。またはりの

軸方向にx軸をとる。

(ロ) 集中質量要素

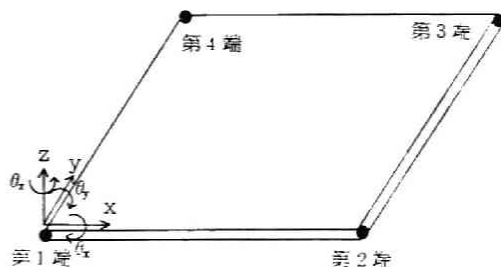
集中質量要素に付けられた座標系を付図4に示す。端は1端のみをもっている。



付図4 集中質量要素

(ハ) 長方形平板要素

付図5に長方形平板要素を示す。これは4つの端をもち、座標系は図のように直交する2辺の1辺をx軸、他辺をy軸に一致させ面に対して法線方向にz軸をとる。そしてこの端を第1端としてz軸をみて右回りに



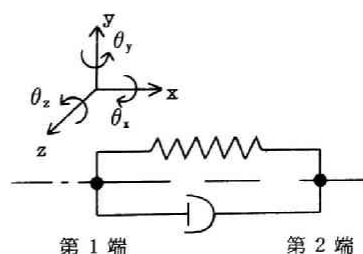
付図5 長方形平板要素

第1端、第2端、第3端および第4端と名付ける。また各端には6つの座標方向があり、合計24個の座標を定める。

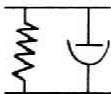
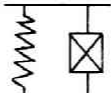
(ニ) 柔結合部要素

柔結合部要素は2端をもち、その座標系を付図6に示す。その6つの座標方

向それぞれに 2.2 節の解析および計算の原理で述べたようなばねとダンパによる等価なモデル化を行う。この柔結合部のモデル化の仕方を柔結合部の型と呼び、このマニュアルに示すプログラムシステムでは、次の 2 つの場合がある。この他に、第 II 章図 2-26 に示した種々の接触結合面要素を容易に付け加えることができる。



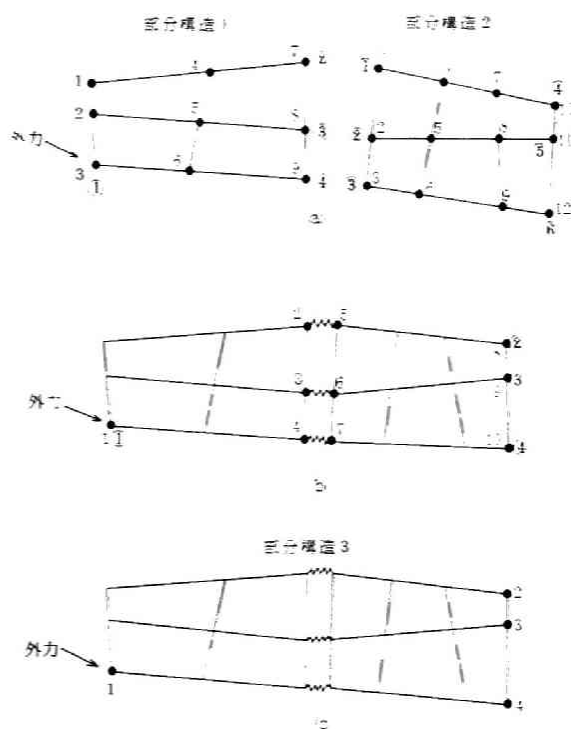
付図 6 柔結合部要素

柔結合部の型番号	内 容
0	 ばねと粘性ダンパの並列モデル
1	 ばねとヒステレティックダンパの並列モデル

2.2 部分構造の動剛性合成の方法の概念についての説明

機械構造全体をいくつかの部分構造に分割し、各部分構造の動剛性を求め、それらを合成しようとするときの概念を付図 7 に示す。今、機械構造を付図 7 (a)に示すように部分構造 1 と 2 の 2 つに分割するとする。そして、それぞれの部分構造を種々の構造要素でモデル化し、部分構造 1 では、1 から順に 9 つの節点があり、図に示すような節点番号が付けられているとする。同様に部分構造 2 には 1 から順に 12 個の節点があり図のように節点番号を付けるとする。このとき、部分構造 1 の節点 7 と部分構造 2 の節点 1、部分構造 1 の節点 8 と部分構造 2 の節点 2、部分構造 1 の節点 9 と部分構造 2 の節点 3 がそれぞれ柔結合部要素で結合されるとする。また部分構造 1 の節点 3 には外力が加わり、部分構造 2 の節点 10, 11, 12 は、部分構造 1 と 2 の合成後、さらに他の部

分構造と結合するとする。これより、部分構造1の動剛性計算は、節点3, 7, 8, 9のものだけでよく、この番号の若いものの順に新たに①, ②, ③, ④の節点番号を付ける。部分構造2では、1, 2, 3, 10, 11, 12の間の動剛性が必要なことより、同様に番号の若いものの順に新たに①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥の節点番号を付ける。したがって部分構造1と2を合成するにあたっては、付図7(b)に示すように構造全体にわたっての節点番号が付図7(a)の○印内の節



付図7 部分構造の動剛性合成の方法の概念についての説明図

点番号に従って部分構造1から順に付けられる。この合成された状態をさらに1つの部分構造とみなし付図7(c)のように部分構造3とする。部分構造3として必要な動剛性は付図7(b)の節点1, 8, 9, 10であるから、部分構造3において新たにそれらの節点を1から順に通し番号とし節点1, 2, 3, 4と名付ける。このようにして部分構造3の動剛性マトリックスが付図7(c)の4つの節点の関係として求まる。

付図7(b)において結合が剛結合のときは、節点2と5、3と6および4と7は同一点ゆえに、1つの結合節点だけを付ける。したがって節点番号は1から7までの7個となる。

このような過程を繰り返して、各部分構造の動剛性を合成していく。この合成の概念はリセブタンス合成法の場合と同様の考え方に基づいている。

